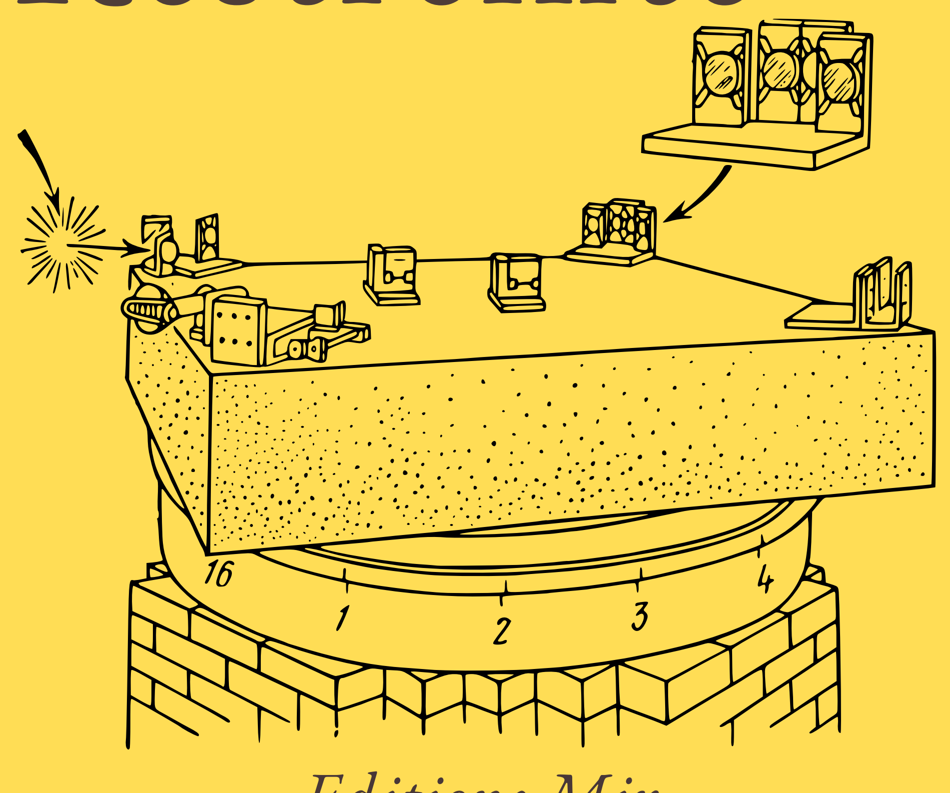
Vladimir Ougarov

Théorie de la Relativité Restreinte



Editions Mir

V. OUGAROV

THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

ÉDITIONS MIR·MOSCOU

Traduit du russe par
V. PLATONOV

на французском языке

AVANT-PROPOS À L'ÉDITION FRANÇAISE

Je suis très heureux de constater que l'édition française de mon livre a augmenté le nombre de ses lecteurs. La première édition russe est publiée en 1969, date à laquelle de profondes modifications ont été apportées aux programmes du secondaire en U.R.S.S.

Dès 1972 les écoliers soviétiques ont la possibilité de se familiariser avec les notions élémentaires de la Relativité restreinte. C'est dire l'importance que revêt la théorie de la relativité restreinte dans les Ecoles Normales Supérieures.

Le présent ouvrage qui traite de la théorie de la relativité restreinte s'adresse tant aux Normaliens qu'aux professeurs qui se sont assignés la tâche d'enseigner le nouveau programme. La théorie de la relativité restreinte qui repose sur la loi fondamentale de la nature, à savoir le principe de la relativité, occupe une place importante dans l'enseignement. D'où le besoin d'un livre simple dont la vocation n'est pas d'être de vulgarisation mais plutôt un manuel exposant les fondements de cette théorie.

Il est indéniable que la matière traitée dans cet ouvrage est largement suffisante pour un professeur. Le choix des sujets relève du but à atteindre. Les développements en petits caractères peuvent être omis en première lecture. La table des matières renseigne amplement sur les sujets traités et sur les liens logiques existant entre eux. Les trois premiers chapitres sont consacrés aux modifications intervenues dans les diverses conceptions sur les relations spatio-temporelles entre les événements sous l'optique de la Relativité restreinte. Les conclusions de ces trois chapitres sont exposées dans les manuels scolaires sous une forme simplifiée. Bien que la notion d'éther soit introduite dans le livre pour ne pas rompre avec la tradition, je voudrais en souligner l'inutilité. La didactique s'en passe parfaitement, car elle ne fait qu'alourdir l'exposé et perdre du temps. Le chapitre IV traite de la mécanique relativiste. Ses conceptions (sans démonstration) figurent tant dans les ouvrages de vulgarisation que dans les manuels scolaires. L'importance de ce chapitre n'est pas à surestimer.

La compréhension du chapitre V exige une profonde connaissance de la théorie de Maxwell ; cela relève du fait que l'extension du principe de la relativité aux phénomènes électromagnétiques a marqué un tournant décisif dans l'évolution de la physique. La théorie de la relativité fut la première à mettre à jour la nature mathématique

du champ électromagnétique. Toutefois, il est à souligner que toutes les conclusions de ce chapitre s'appuient sur la théorie de Maxwell.

La lumière occupe une place particulière dans la Relativité. Les phénomènes lumineux font l'objet du chapitre VII. Le lecteur trouvera dans les chapitres VIII et IX une matière supplémentaire utile.

Je serais heureux de connaître l'opinion des lecteurs de ce livre. La chaire de physique théorique de l'Institut Pédagogique Lénine de Moscou s'attache particulièrement à adapter la physique moderne aux programmes scolaires. Pour cette raison on s'intéresse beaucoup à toutes les remarques et suggestions de la part des lecteurs, qui peuvent être utiles pour ce travail.

L'auteur

DATES MÉMORABLES MARQUANT L'ÉVOLUTION DE LA PHYSIQUE

Détermination de la vitesse de la lumière lors des éclipses du satellite de Jupiter, O. Römer, 1676.

Principe de la relativité de Galilée, 1638.

I. Newton, « Philosophiae Naturalis Principia Mathematica », 1687.

Découverte de l'aberration de la lumière, J. Bradley, 1727.

Effet Doppler, 1842.

Expérience du pendule de Foucault, 1851.

Détermination de la vitesse de la lumière en laboratoire, H. Fizeau — 1849, L. Foucault — 1850.

Détermination de la vitesse de la lumière dans un milieu en mouvement, H. Fizeau, 1851.

Théorie de Maxwell (trois premiers grands articles), 1856, 1861 à 1863 et 1864. Treatise on Electricity and Magnetism, 1873.

Première expérience de Michelson, 1881.

Expérience perfectionnée de Michelson, 1887.

Découverte de la radio-activité, les électrons relativistes, H. Becquerel, 1896.

Découverte de l'électron, J. J. Thomson, 1894-1896.

Découverte expérimentale de la « dépendance » de la masse de l'électron de sa vitesse, W. Kaufmann, 1902.

A. Einstein, « Uber die Elektrodynamik der schwingenden Körper », Ann. der Phys., **17**, 891 (1905).

H. Minkowski, « Raum und Zeit » Phys. Zs. **10**, 104 (1909).

N. Copernic (1473-1543)
G. Galilée (1564-1642)
R. Descartes (1596-1650)
C. Huygens (1629-1695)
I. Newton (1642-1727)
C. Doppler (1803-1853)
J. Maxwell (1831-1879)
H. Lorentz (1853-1928)
H. Poincaré (1854-1912)
H. Minkowski (1864-1909)
A. Einstein (1879-1955)

QUELQUES NOTATIONS

K, K', K'' — notations des référentiels d'inertie;
K^0 — système de référence où le corps considéré (ou système) est immobile (système « propre » de référence) ;
c — vitesse de la lumière dans le vide;
V — vitesse relative de deux référentiels d'inertie;
v — vitesse d'un point matériel;

$$\beta=\frac{v}{c}, \quad B=\frac{V}{c}; \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Gamma=\frac{1}{\sqrt{1-B^2}};$$

$s_{12}^2 = c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$ — intervalle entre deux événements;
$\mathscr{E}$ — énergie d'une particule ou d'un système de particules.
Les vecteurs tridimensionnels sont désignés comme suit:
$\boldsymbol{E}$ — intensité d'un champ électrique,
$\boldsymbol{D}$ — induction d'un champ électrique,
$\boldsymbol{B}$ — induction d'un champ magnétique,
$\boldsymbol{H}$ — intensité d'un champ magnétique.
E_x, E_y, E_z, D_x, etc.— composantes cartésiennes des vecteurs tridimensionnels correspondants.

Les quadrivecteurs sont désignés par les lettres surmontées d'une flèche (la parenthèse inclut les désignations des composantes et leur signification tridimensionnelle), par exemple:

$$\vec{R}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \vec{R}(\boldsymbol{r}, ict) \text{ quadrirayon vecteur,}$$

$$\vec{V}(u_1, u_2, u_3, u_4) \equiv \vec{V}(\gamma v, ic\gamma) \text{ quadrivitesse,}$$

$$\vec{\Phi}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) \equiv \vec{\Phi}\left(\boldsymbol{A}, \frac{i}{c}\varphi\right) \text{ quadripotentiel.}$$

Les indices grecs α, β, γ, . . . prennent les valeurs de 1 à 3 et désignent les composantes des vecteurs tridimensionnels et des tenseurs, par exemple:

$$B_\alpha, \; M_{\alpha\beta};$$

α, β — indices « libres » prenant les valeurs indépendantes de 1 à 3.
Les indices latins i, k, l, . . . prennent les valeurs de 1 à 4 et désignent les composantes des quadrivecteurs et des tenseurs:

$$\Phi_k, \; M_{ik}.$$

Deux indices identiques, faisant partie du même membre de l'égalité, entendent la sommation (voir Appendice):

$$A_kB_k \equiv \sum_{\alpha=1}^{4} A_\alpha B_\alpha = A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+A_4B_4 = \vec{A}\vec{B},$$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_i} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3}+\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_4} = \operatorname{div}\vec{\Phi}.$$

Les formules sont numérotées selon les chapitres; en se référant aux formules d'un autre chapitre on donne le numéro de celui-ci, par exemple (II, 8), et (Appendice, 8) s'il s'agit de l'Appendice. Dans les exemples traités dans le chapitre IV, la numération est indépendante de celle du texte principal.

Les formules de l'Electrodynamique sont exprimées en unités de SI.

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

1. Système de coordonnées et système de référence. Tous les phénomènes de la nature se déroulent dans l'espace et dans le temps. Un élément de tout phénomène physique, appelé en Relativité restreinte *événement*, est ce qui se passe à un instant donné en un point donné de l'espace (il s'agit réellement d'un domaine relativement petit de l'espace et d'un court intervalle de temps). L'événement, comme il découle de sa définition, peut avoir de très différentes manifestations. Il est admis alors de dire que « l'événement consiste en ce que... ». Une fois un événement réalisé, on dit « qu'il a eu lieu ». Tout phénomène de la nature est une suite de réalisations dans le temps et dans l'espace d'un ou de plusieurs événements. Aussi, la description d'un certain événement sert-elle de base pour celle du phénomène tout entier. Il semble donc raisonnable d'aborder l'étude par la considération d'un événement.

Un point d'espace, affecté d'un événement, doit être rattaché à un repère et cela avant l'étude des phénomènes physiques concrets. Or l'espace est homogène et isotrope, c.-à-d. que tous les points et toutes les directions de l'espace sont équivalents. L'espace est exempt de bornes et de chemins. Seuls les corps s'y trouvant peuvent servir de repères. A un de ces corps nous associerons l'*origine de référence* du système de coordonnées. La mesure des longueurs se fait avec des règles ou échelles qui nous serviront comme étalons de longueur.

Le système de coordonnées (de Descartes) représente la méthode la plus efficace du repérage des points spatiaux. La construction en est simple. Soulignons dès le début qu'elle repose sur la supposition de la validité des postulats géométriques d'Euclide dans l'espace physique réel, c.-à-d. là où ont lieu les phénomènes physiques. Cette hypothèse faite, menons de l'origine de référence trois axes X, Y, Z formant un trièdre rectangle. D'un point quelconque M de l'espace on peut abaisser les perpendiculaires sur les axes X, Y, Z (on dit encore que le point M est projeté sur les axes X, Y, Z). En mesurant les distances de l'origine aux projections du point M sur les axes X, Y, Z nous obtenons, en échelle choisie, trois nombres x, y, z appelés coordonnées cartésiennes du point M. Remarquons que pour mesurer la distance il convient de porter des échelles unitaires, bout à bout, alignées sur l'axe à partir de l'origine jusqu'à la position de la pro-

jection. Ce procédé utilisé dans la vie quotidienne toutes les fois qu'il s'agit de mesurer une distance n'est valable que si un segment ou un corps mesurés sont au repos par rapport à l'échelle.

Ainsi, chaque point de l'espace est défini par trois coordonnées (repères) cartésiennes x, y, z. Mais le choix de l'origine, ainsi que des directions des axes orthogonaux est tout à fait arbitraire. En effet, en choisissant une autre origine du système de coordonnées cartésiennes ou bien en le tournant tout entier d'un angle autour de l'origine, on obtient un nouveau système de coordonnées cartésiennes qui est parfaitement équivalent au précédent. Cependant, les valeurs numériques des coordonnées d'un même point diffèrent selon le système de coordonnées choisi. Donc, le système de coordonnées cartésiennes permet de fixer tous les points de l'espace et cela d'une manière qui dépend des systèmes choisis qui sont en principe équivalents.

Le système de coordonnées orthogonales inventé par Descartes (XVII s.) rendit possible l'étude des objets géométriques par les méthodes purement algébriques. Pour éviter les calculs encombrants lors de l'étude de ces objets, il convient de faire un choix raisonnable du système de coordonnées. Il est évident que les équations d'ellipse ou d'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

n'ont cette forme simple que si les axes du système de coordonnées coïncident avec les axes de symétrie de ces figures. Il va de soi qu'aucune de leurs caractéristiques géométriques n'est omise dans d'autres systèmes de coordonnées mais la forme des équations et leurs analyses seront de beaucoup plus compliquées.

Dans le cas général, la distinction entre les systèmes de coordonnées cartésiennes réside dans le choix de l'origine et dans l'orientation du système tout entier. Lors du passage d'un système de coordonnées à l'autre, appelé transformation des coordonnées, les coordonnées du point et la forme de l'équation décrivant quelque objet géométrique changent. Cependant, d'après l'esprit même de la géométrie les propriétés géométriques des figures ne peuvent être influencées par le choix du système de coordonnées et restent partout les mêmes. Les relations analytiques doivent traduire ce fait de façon adéquate. En effet, lors des transformations des coordonnées cartésiennes les quantités telles que la distance de deux points, l'angle entre deux directions demeurent invariables. Notons l'importance particulière du fait que la distance de deux points M_1 et M_2 est invariable, ou, comme on dit encore, *invariante* par rapport à la transformation des coordonnées. Formulons cette assertion analytiquement. Soient x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées des points M_1 et M_2 respectivement dans le système X, Y, Z et x'_1, y'_1, z'_1 et x'_2, y'_2, z'_2 les coordonnées des mêmes points dans le système X', Y', Z'. Alors on a l'éga-

lité :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2. \quad (*)$$

Pour le cas des points M_1 et M_2 infiniment proches $x_2 - x_1 = dx$, $y_2 - y_1 = dy$, $z_2 - z_1 = dz$,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2. \quad (**)$$

Les égalités (*) et (**) traduisent le théorème de Pythagore reliant l'hypoténuse avec les côtés d'un triangle rectangle.

Comment arriva-t-on aux lois de la géométrie et, en particulier, comment Euclide parvint-il à formuler ses postulats? Les notions fondamentales de la géométrie se formèrent au cours de l'activité millénaire de l'humanité. Le terme même de géométrie (« mesure de la terre ») souligne ce fait. L'expérience des arpenteurs fut accumulée il y a environ 2500 ans dans les postulats d'Euclide. Ainsi, la géométrie est une science plutôt expérimentale qu'abstraite. L'évolution de la géométrie comme science est très instructive. Depuis l'époque d'Euclide jusqu'à nos jours, les gens apprennent les bases de cette géométrie. On oublia peu à peu l'origine expérimentale de la géométrie en la considérant comme branche purement abstraite des mathématiques.

Il est curieux cependant que les mathématiciens furent les premiers à démentir le caractère faussement abstrait de la géométrie. Déjà Gauss comprit que la géométrie de par ses bases plutôt inclinait vers la physique que vers les mathématiques pures. Il vit que si l'on voulait décrire de la façon adéquate la réalité physique, les lois géométriques devraient être vérifiées par l'expérience. Cela est également vrai pour les postulats d'Euclide. Toutefois, la vérification expérimentale montra que ces postulats n'étaient pas universellement parfaits. Mais nous en reparlerons plus tard. Pour l'instant, envisageons les différences dans le choix des systèmes de coordonnées dans la géométrie et dans la physique.

L'étude des objets géométriques ne comprend pas leur description en mouvement. Il est absurde, par exemple, d'étudier les propriétés du parallélogramme en mouvement. Voilà pourquoi, dans la géométrie, sont envisagés des systèmes de coordonnées qui se distinguent seulement par les positions mutuelles et non par le mouvement. Le temps est donc exclu de la géométrie.

Par contre, le temps est une des caractéristiques du phénomène physique. L'étude du mouvement est l'essentiel de la physique. Le mouvement mécanique qui est le plus simple est un changement de position d'un corps (ou d'un point matériel) dans l'espace avec le temps. En plus du système de coordonnées cartésiennes, assurant le repérage des points de l'espace, le physicien a besoin de chronomètres. L'étude des phénomènes est ramenée alors à l'indication de ce qui se produit dans les points donnés aux instants donnés. Un point

est défini par les coordonnées (x, y, z), le temps y étant mesuré à l'aide d'un chronomètre. On appelle, en Relativité restreinte, *système de référence* tout système de coordonnées qui associe à chaque point de l'espace trois coordonnées et qui est doté de chronomètres dans tous les points où l'on mesure le temps. La théorie de la Relativité restreinte utilise le plus souvent le système de coordonnées cartésiennes (de Descartes) qui est alors dit système de Lorentz. La Relativité suppose qu'on ait une quantité suffisante d'horloges identiques, c.-à-d. qui marchent au même rythme étant placées au même point. Nous supposons que chaque point de l'espace, lié aux événements en question, soit muni de l'une de ces horloges.

Pourquoi n'est-il pas suffisant d'avoir une seule horloge placée, disons, à l'origine du système de référence? Nous heurtons ici une circonstance qui joue le rôle décisif dans la théorie de la relativité. Supposons, qu'une horloge soit placée à l'origine du système de référence (référentiel). Comment fixer alors des événements affectant des points éloignés de l'origine? Il est évident qu'il faut envoyer depuis ce point éloigné au point d'emplacement de l'horloge un message signalant que l'événement a eu lieu. On parle alors en Relativité restreinte de l'envoi d'un *signal* ou de la transmission d'une information. Mais, d'après les conceptions modernes, tout signal ne se propage qu'avec une vitesse finie (la plus grande vitesse possible est celle de la lumière dans le vide). Il en découle que l'origine de référence recevra les signaux avec des retards dépendant de l'éloignement des points où les événements ont eu lieu. Il est par conséquent peu commode d'avoir une seule horloge.

Tenir compte de la vitesse limite du signal ou, ce qui revient au même, de la transmission de l'interaction, est bien une particularité caractéristique de la Relativité restreinte. La mécanique classique suppose la transmission immédiate des signaux, c.-à-d. à la vitesse infinie. Il en découle qu'une seule horloge est suffisante pour enregistrer les événements, car l'arrivée d'un signal infiniment rapide dans l'origine de référence définit le moment de réalisation de l'événement. C'est pourquoi dans la physique classique il suffit de n'en avoir qu'une seule horloge et il est tout à fait sans importance où la placer.

En géométrie, le choix de l'origine et des directions des axes du système de coordonnées cartésiennes est arbitraire. Il en est de même pour les phénomènes physiques. Pourtant, les physiciens sont obligés d'envisager des systèmes de référence qui se déplacent l'un par rapport à l'autre. Du point de vue physique deux questions s'imposent. La première question est la suivante: ces référentiels sont-ils équivalents du point de vue des concepts physiques? Quant à la seconde question, elle exige une explication plus détaillée. Admettons que nous observions un phénomène physique concret à l'aide des appareils enregistreurs fixés dans un référentiel. Lors des mesures, nous obtenons certaines valeurs numériques des grandeurs physiques caracté-

risant ce phénomène. Toutefois, le même phénomène physique peut être observé dans un autre système de référence qui se déplace par rapport au premier. Les mesures effectuées dans le second référentiel nous fournissent également des valeurs numériques correspondant aux mêmes paramètres. Comment alors procéder à la confrontation de ces nombres? Cela s'avère nécessaire vu que le système de référence est une construction artificielle destinée à l'usage pratique, qui pourrait être comparée à l'échafaudage du bâtiment à édifier. Or, les lois de la nature ne doivent pas dépendre du choix du système de référence. Naturellement, les résultats des mesures différeraient selon les référentiels choisis, mais, en tout cas, nous devons savoir transformer les résultats des observations obtenus dans un système de référence en ceux qui sont obtenus ou pourraient l'être dans un autre. Bref, on a besoin de la loi de transformation qui relierait les résultats des observations. Pourtant, le problème n'est pas si simple qu'il paraît de prime abord. La transformation des résultats de mesures physiques lors du passage d'un référentiel à l'autre qui est animé d'une translation rectiligne et uniforme par rapport au premier apparaît comme un des problèmes de la Relativité restreinte.

Notons encore que l'appellation même de théorie de la relativité ou, autrement dit, de théorie relativiste, est assez mal choisie. A première vue il en découle que la relativité de différentes grandeurs, c.-à-d. leur dépendance du choix du système de référence, est l'essentiel de la théorie. Mais le fond de la théorie est juste le contraire. La théorie de la relativité montre que les lois de la nature sont invariantes par rapport aux lois de transformation et ne dépendent ni de la position de l'observateur ni de son mouvement; les résultats des mesures effectuées dans différents référentiels sont comparables. En langage de philosophie la Théorie de la relativité restreinte met en évidence le caractère objectif des lois de la nature et non la relativité du savoir.

2. Transformation de Galilée. Le problème de la transformation des résultats des mesures dans un système de référence en ceux de l'autre se posa même avant l'apparition de la Théorie de la relativité. Evidemment, pour les différentes grandeurs mesurées les lois de transformation ne sont en général pas identiques. Commençons par l'étude de la transformation des grandeurs qui définissent un événement. Traitons tout d'abord le procédé classique qui n'est valable que dans le cas de petites vitesses relatives (par rapport à la vitesse de la lumière c).

Un événement dans un système de référence arbitraire K est défini par les nombres x, y, z, t, les trois premiers étant les coordonnées du point en question et t étant l'instant où l'événement a eu lieu. Que deviennent les mêmes nombres x', y', z', t' dans n'importe quel autre système de référence K' qui se meut par rapport au système K?

Nous sommes obligés, dès le début, de n'analyser que les référentiels qui se déplacent d'un mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre. En d'autres termes, aucun système de référence n'éprouve d'accélération par rapport à l'autre. On verra dans la suite qu'il s'agit d'un ensemble des *systèmes d'inertie*, dont la définition sera donnée plus loin. La Relativité restreinte fait abstraction des systèmes se déplaçant avec accélération par rapport aux systèmes d'inertie et n'étudie que ces derniers. Dans ce qui suit, on aura donc affaire à des systèmes en mouvement rectiligne et uniforme relatif. Il est connu que la rotation du système de coordonnées cartésiennes ne change que les valeurs numériques des coordonnées des points sans influer aucunement sur des phénomènes physiques (cette rotation est l'objet de la géométrie analytique). En tenant compte de ce fait, nous pouvons orienter les axes des systèmes K et K' parallèlement les uns aux autres. Sans nuire à la généralité, dirigeons l'axe commun x, x' suivant le sens de la vitesse relative des référentiels K' et K. Tant qu'il s'agit du cas non relativiste, nous supposons qu'une horloge soit mise à l'origine de chaque système.

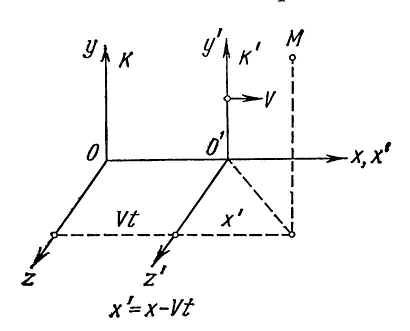


Fig. 1. Deux systèmes d'inertie K et K' aux axes parallèles, qui se meuvent avec la vitesse relative V (V est la vitesse de K' par rapport à K). La physique classique permet de transformer les coordonnées de l'événement du système K en celles du système K' d'après les formules de la transformation de Galilée:
$x' = x - Vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$.

Soit V la vitesse du référentiel K' par rapport à K; celle de K par rapport à K' est évidemment $-V$. Pour la commodité admettons qu'au moment initial $t = 0$ les deux systèmes de coordonnées coïncident. Le système K' se meut avec une vitesse constante V de façon que son origine O' glisse le long de l'axe x. Du point de vue géométrique, les systèmes K et K' ne se distinguent que par la translation de l'origine, la valeur de cette translation étant égale à l'instant donné au déplacement de O' par rapport à O. De la figure 1 il découle immédiatement que les coordonnées du point M dans K' s'expriment au moyen des coordonnées de ce même point dans le système K d'après les formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - Vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Et le temps, comment se transforme-t-il en passant au système K'? Le « bon sens » nous suggère que le temps s'écoule de la même façon

dans les deux systèmes, ce qui implique la quatrième relation $t = t'$. Nous aurons l'occasion de constater que, bien que l'intuition ne nous trompe pas dans la vie quotidienne, l'affirmation $t = t'$ en principe n'est pas juste et certaines conditions concourent à la démentir.

La transformation (1) peut s'écrire sous forme vectorielle (rappelons que dans le système K on a $\boldsymbol{V}$ $(V,\ 0,\ 0)$):

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t, \\ t' &= t. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Cette transformation de coordonnées et du temps est connue sous le nom de *transformation de Galilée*. En étudiant le mouvement relatif de deux systèmes, nous utiliserons désormais la disposition et le mouvement des systèmes qui viennent d'être décrits.

3. Principe de la Relativité galiléen. Nous avons vu que bien que le système de référence soit indispensable pour mesurer les distances et le temps, son choix est, dans une certaine mesure, arbitraire. Mais le référentiel n'étant qu'un moyen auxiliaire, il ne doit aucunement influer sur les lois physiques fondamentales qui sont objectives et indépendantes de notre conscience.

Evidemment, nous nous sommes habitués au système de référence lié à la Terre, nommé parfois système de référence du laboratoire. Néanmoins, même si l'on ne se soucie pas de l'équivalence des référentiels, la vie exige l'utilisation de différents systèmes animés d'un mouvement relatif. Les observations astronomiques, par exemple, se font non seulement à partir de la Terre, mais aussi à l'aide des appareils installés au bord d'une fusée, d'un satellite artificiel ou bien d'un vaisseau cosmique. Ainsi l'on dispose des données sur un objet cosmique obtenues dans deux systèmes de référence. Pour les analyser il faut savoir transformer ces données mutuellement. Nous venons de considérer le cas classique de la transformation des coordonnées de l'événement qui représente le phénomène physique élémentaire. Maintenant, nous abordons les phénomènes mécaniques étudiés dans différents référentiels.

Pour plus de commodité, on parle parfois de différents « observateurs » ou des « observateurs situés dans divers systèmes de référence ». Autrefois cette terminologie donnait lieu aux vives discussions car certains y voyaient le caractère subjectif de l'analyse des phénomènes physiques. Mais la présence de l'« observateur » lors des mesures n'est point obligatoire puisque ces mesures peuvent être effectuées par des appareils, sans participation de l'homme. Pratiquement c'est ce qui se passe au bord des vaisseaux cosmiques, même s'il y en a des hommes. On entend par l'observateur du système K un ensemble d'appareils enregistreurs immobiles dans K. Il n'y a pas à s'étonner que depuis différents systèmes de référence arrivent différentes

données caractérisant le même phénomène. L'objectivité des lois de la nature consiste en ce que les résultats d'observations dans un référentiel d'inertie peuvent être transformés en ceux dans l'autre. Nous espérons qu'après ces explications, l'apparition de l'« observateur » dans cet ouvrage ne suscitera plus d'objections.

Comment donc apparaît un phénomène mécanique observé du point de vue de deux systèmes de référence se déplaçant d'un mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre? Nous nous adresserons très souvent aux systèmes suivants: un système lié rigidement à un train ou à un navire se déplaçant uniformément en ligne droite par rapport à la Terre et l'autre rattaché à la Terre. Nous connaissons de notre propre expérience que dans un train animé d'un mouvement rectiligne et uniforme on a l'impression d'être sur le sol « immobile ». Galilée fut le premier à découvrir que ce fait est commun à tous les phénomènes mécaniques. Il remarqua qu'un même phénomène mécanique se déroulait de la même façon du point de vue de deux systèmes K et K' animés d'un mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre. Il est indispensable cependant de préciser ce qui signifie « se dérouler de la même façon ». Il est clair que les vitesses d'un corps diffèrent selon K et K'. En effet, soit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ une fonction vectorielle du temps qui définit dans K la position du corps.

D'après la transformation galiléenne, on a:

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{V}t.$$

En prenant la dérivée de deux membres de l'équation par rapport au temps et compte tenu de ce que $d\boldsymbol{r}'/dt = \boldsymbol{v}'$ et $d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{v}$, on obtient:

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}. \qquad (3)$$

Ainsi, les vitesses du corps sont différentes dans les systèmes K et K'. De (3) il découle en particulier que si la vitesse est infinie dans un système d'inertie, elle l'est également dans tous les autres (à condition que $\boldsymbol{V}$ soit finie).

Toutefois, l'accélération du corps reste la même dans les deux systèmes, ce qui devient évident après la dérivation de l'équation (3):

$$\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad (\boldsymbol{V} = \text{const}).$$

Donc, nous pouvons constater que les coordonnées et la vitesse du point matériel sont différentes dans les systèmes K et K' tandis que les accélérations sont les mêmes. Les grandeurs qui changent lors du passage d'un système de coordonnées à l'autre sont appelées grandeurs *relatives*. Ainsi donc, la vitesse et les coordonnées du point matériel sont les grandeurs relatives.

Le principe fondamental de la mécanique (deuxième loi de Newton) qui relie la force agissant sur le corps à l'accélération communi-

quée au corps par cette force s'écrit:

$$m_0 \frac{dv}{dt} = \boldsymbol{F}, \tag{4}$$

où le coefficient m_0 est appelé *masse du corps.*

L'égalité des accélérations dans tous les systèmes d'inertie et le principe fondamental de la mécanique (4) entraînent l'égalité des forces agissant sur le corps, quel que soit le référentiel. On va voir qu'il en est tout autrement en Relativité restreinte.

Si les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les systèmes de référence se mouvant de façon rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres, la relation (4) doit être de la même forme dans tous ces systèmes. Il est facile de s'en assurer. Les calculs précédents permettent de constater que l'accélération est indépendante du référentiel. Et comment changent les forces lorsqu'on passe d'un système de référence à l'autre? Soient deux corps I et II dont nous étudions le comportement; supposons que la force d'interaction de ces corps soit fonction de leur distance, de leur vitesse relative et du temps. La transformation de Galilée ne perturbe en général aucune de ces grandeurs. En effet, inscrivons les coordonnées et les vitesses des corps I et II dans les systèmes K et K' en nous servant de la transformation de Galilée:

	Coordonnées et vitesses des corps I et II dans K	Idem dans K'	Transformation de vitesse
I	$x_1, y_1, z_1; v_1$	$x'_1 = x_1 - Vt,\ y'_1 = y_1,\ z'_1 = z_1$	$\boldsymbol{v}'_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}$
II	$x_2, y_2, z_2; v_2$	$x'_2 = x_2 - Vt,\ y'_2 = y_2,\ z'_2 = z_2$	$\boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}$

On en tire immédiatement $x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$, $y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1$, $z_2 - z_1 = z'_2 - z'_1$. Comme la distance des points est:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ ou}$$

$$\sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2},$$

on voit qu'elle n'est pas modifiée lors du passage de K à K'. La vitesse relative ne varie non plus:

$$\boldsymbol{v}'_2 - \boldsymbol{v}'_1 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1.$$

Quant au temps, il demeure invariable, lui aussi, en vertu de la transformation de Galilée: $t = t'$. Par conséquent, les forces qui sont fonction des grandeurs citées ne changent pas leur forme en passant de K à K'. Or les forces les plus importantes considérées en mécanique dépendent soit de la distance (forces de gravitation, électriques, élastiques), soit de la vitesse relative (forces de frottement). Ainsi,

la majorité des forces rencontrées en mécanique restent invariables par rapport à la transformation de Galilée. Toutes les grandeurs de la relation (4) (accélérations, masses et forces) étant invariables par rapport à la transformation de Galilée, le principe fondamental de la mécanique classique a la même forme dans les systèmes K et K'. Les équations de Newton ne diffèrent dans ces systèmes que par les désignations des variables. Dans le système K, si la force dépend de la distance et du temps, le principe fondamental s'écrit:

$$m_0 \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(r_{12}, t)$$

et dans le système K'

$$m_0 \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} = \boldsymbol{F}(r'_{12}, t').$$

Les deux relations sont en principe identiques, à l'exception des désignations des variables (grandeurs primées et non primées).

Les équations qui conservent leur forme par rapport aux certaines transformations des coordonnées s'appellent équations *covariantes* par ces transformations. Le principe fondamental de la mécanique est donc covariant par rapport à la transformation de Galilée. Mais cette équation est une équation différentielle ordinaire du second ordre. Ses solutions en variables des systèmes K et K' coïncideront si les données initiales dans ces systèmes coïncident. De la covariance du principe fondamental de la mécanique découle que tous les phénomènes mécaniques ne se produisent identiquement dans tous les systèmes de coordonnées se mouvant uniformément qu'au cas où les conditions initiales coïncident.

Si les conditions initiales pour un même phénomène ne sont pas les mêmes dans divers systèmes de coordonnées, alors ces phénomènes revêtent des aspects différant selon les systèmes. L'exemple en est fourni par une goutte de la pluie qui tombe suivant la verticale pour l'observateur qui se trouve sur la plate-forme et suivant la parabole pour l'observateur se déplaçant avec le train (nous admettons que la goutte tombe avec une accélération). Mais les conditions initiales étaient différentes dans ces systèmes: du point de vue de l'observateur lié au train, la goutte avait la composante horizontale de la vitesse au moment initial, tandis que pour l'observateur terrestre elle ne l'avait pas.

Il est à souligner que le principe fondamental classique admet la propagation instantanée (avec la vitesse infinie) de l'action exercée entre les corps. Dans la mécanique classique, on estime que les forces dépendent de la distance des corps, même pour les corps en mouvement relatif. Cependant, la distance entre deux corps en mouvement s'écrit sous la forme suivante:

$$r_{12} = \sqrt{[x_2(t) - x_1(t)]^2 + [y_2(t) - y_1(t)]^2 + [z_2(t) - z_1(t)]^2}.$$

En supposant que l'interaction (force) se transmette à une vitesse finie, on n'a plus le droit d'inclure seul r_{12} dans l'expression pour la force. En effet, si l'on veut connaître la valeur de la force avec laquelle le corps II agit sur le corps I, la position du corps II doit être considérée non pas à l'instant t, mais avant celui-ci d'un intervalle de temps nécessaire pour la transmission de l'action du corps II au corps I. Négliger ce retardement c'est de considérer comme infiniment grande la vitesse de la transmission de l'action. C'est bien l'un des concepts fondamentaux de la physique classique, dit « loi d'action à distance ».

4. **Référentiels d'inertie.** Le principe de relativité galiléen veut que dans tous les systèmes de référence utilisés afin d'observer des phénomènes mécaniques le principe fondamental de la mécanique soit valable. Nous appelons système de référence d'inertie un tel système (ou plutôt de tels systèmes puisqu'il s'avérera qu'il en existe une infinité) dans lequel sont vérifiés le principe d'inertie et le principe fondamental (4). On dit souvent que le principe d'inertie (première loi de Newton) est une conséquence du principe fondamental (deuxième loi de Newton). Formellement, c'est vrai. Le deuxième membre de la relation (4) représente la résultante de toutes les forces appliquées au corps. Le principe fondamental affirme que l'accélération acquise par le corps est proportionnelle à cette résultante et inversement proportionnelle à la masse du corps. Il vient de l'équation (4) que l'accélération du corps est nulle si la résultante de toutes les forces est nulle ou en l'absence de forces. Autrement dit, si le corps n'a pas d'accélération, il persiste dans son état de repos ou de mouvement rectiligne et uniforme. On voit donc que le principe d'inertie peut se déduire du principe fondamental de la mécanique.

Pourquoi alors Newton formula-t-il séparément le principe d'inertie ? Il est impossible d'admettre que Newton ne vît pas que le principe d'inertie était une conséquence du principe fondamental. Mais c'est une chose plus compliquée qu'elle ne paraisse du premier coup d'œil. Premièrement, l'accélération d'un corps n'est la même que dans les systèmes en translation rectiligne et uniforme. Deuxièmement, et c'est d'une importance capitale, nous définissons les forces comme le résultat de l'interaction des corps. Dans les référentiels où le principe fondamental est valable, les accélérations ne sont engendrées que s'il y a l'interaction des corps. Cependant, dans les systèmes de référence arbitraires ce n'est plus strictement nécessaire.

Il était évident pour Newton que l'équation (4) aussi bien que le principe d'inertie n'étaient pas universels pour tous les systèmes de référence. C'est pour cette raison que Newton dut souligner le fait de l'*existence* d'un système de référence déterminé où ces principes étaient valables. Il le fit dans le principe d'inertie qui stipule qu'un

système de référence d'inertie (c.-à-d. un référentiel où le principe d'inertie est valable) existe. En d'autres termes, on peut indiquer un système où le corps qui n'entre en interaction avec aucun autre corps est en mouvement rectiligne et uniforme. Notons, en passant, que la validité du principe d'inertie (qui n'est qu'un cas particulier de la loi de conservation de l'impulsion) découle des propriétés générales de l'espace, à savoir, de l'équivalence de tous ses points (*homogénéité*). Mais nous n'allons pas maintenant développer ce sujet.

Comment donc trouver un système (ou des systèmes) où le principe fondamental soit confirmé? L'expérience avec le pendule de Foucault permet de le faire. Pour la commodité nous supposons que l'expérience soit faite sur l'un des pôles terrestres (fig. 2). Sur le pôle on installe un cadre auquel est attaché un pendule. Le point de suspension est situé sur l'axe terrestre. L'articulation au point de suspension est libre de façon que le cadre n'entraîne pas le fil de suspension. En équilibre, le fil du pendule suit l'axe de la Terre. Si nous écartons le pendule de la position d'équilibre, il effectuera des oscillations dans un certain plan. Le pendule est soumis à l'action de deux forces : l'attraction terrestre mg et la tension du fil T. Les deux forces sont disposées dans le plan d'oscillations P et ne peuvent pas modifier l'orientation de ce plan. Ce dernier conservera sa position par rapport à la Terre si le principe fondamental de la mécanique est strictement vérifié sur la Terre. Mais l'expérience montre que la Terre fuit le pendule et par cela même elle se fait exclure des systèmes de coordonnées où le principe fondamental est strictement exact.

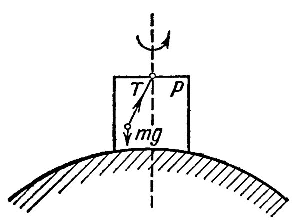


Fig. 2. Expérience de Foucault permettant de trouver un des systèmes d'inertie. Le schéma représente l'expérience effectuée sur le pôle. En réalité, elle n'était pas faite sur le pôle, mais le résultat ne s'en trouve pas pour autant modifié.

Habituellement, on passe sur ce fait et l'on suppose que le principe fondamental soit incontestablement valide sur la Terre. L'expérience avec le pendule de Foucault démentit cette supposition.

Cela n'est pas pourtant tellement grave, car les principes de la mécanique de Newton peuvent être pratiquement utilisés sur la Terre avec un grand succès. Par exemple, la mécanique industrielle et la mécanique rationnelle se basent sur ces principes sans y apporter aucune correction. En effet, les corrections sur la « non-inertialité » du référentiel lié à la Terre sont minimes.

Mais, en principe, la Terre n'est pas un système d'inertie. Un système d'inertie est un système de coordonnées par rapport auquel le plan d'oscillations du pendule ne change pas d'orientation. La même expérience de Foucault permet de trouver aisément ce système. Celui-ci est plutôt « exotique ». Son origine est située sur le Soleil

et les trois axes des coordonnées sont rattachés aux « étoiles fixes » (c.-à-d. aux étoiles se déplaçant rigidement avec la sphère céleste). Vu le rôle particulier du Soleil, ce système est appelé *héliocentrique*. Il est à noter tout de même que le choix du système d'inertie est dicté par l'orientation des axes des coordonnées. Le fait que l'origine de référence se trouve au centre d'inertie du Soleil n'est autre que la question de commodité (le Soleil est un corps de notre système solaire qui possède la plus grande masse).

Ainsi donc, les principes de la mécanique classique sont vérifiés dans le système héliocentrique. Pourtant ils sont justes aussi dans d'autres systèmes de coordonnées. Conformément au principe de relativité galiléen, les lois de Newton sont valables pour tous les systèmes de référence qui sont en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au système héliocentrique. Donc, dans tout ce qui suivra nous les appellerons systèmes d'inertie. Il est évident qu'ils sont en nombre infini.

Cependant, dans tout référentiel se déplaçant avec une accélération par rapport à un système d'inertie (notons que la valeur d'accélération sera alors identique dans tous les systèmes d'inertie), on observera des écarts des principes de la mécanique.

L'expérience de Foucault permit donc d'établir l'existence d'un système où les lois de la mécanique sont valables et le principe de relativité galiléen fournit tout un ensemble des référentiels d'inertie. Certes, l'expérience mécanique de Foucault n'est pas la seule à découvrir un système d'inertie. Par exemple, en observant la déviation de la verticale des corps en chute libre, on décèle également la non-inertialité du système géocentrique. Il est évident que les systèmes de référence inertiaux et non inertiaux se distinguent aussi physiquement. Si le corps n'est pas soumis à aucune force dans un système d'inertie, il est au repos ou en mouvement rectiligne et uniforme. Si la charge électrique est immobile dans un système d'inertie, elle ne rayonne donc pas. Si le corps est au repos dans un système non inertial, il subit obligatoirement l'action des forces (dans le sens newtonien du mot). Si la charge est immobile dans un tel système, elle n'émet pas de l'énergie.

5. Temps et espace absolus. Bien qu'en principe on ait tout dit sur la signification des notions du temps et de l'espace lors de la déduction de la transformation de Galilée, il paraît indispensable de mieux préciser nos affirmations. Habituellement quand on parle de la physique « classique », on a en vue la mécanique newtonienne. Les concepts du temps et de l'espace de Newton traduisent le point de vue classique. La raison d'analyser plus attentivement les concepts de Newton consiste en ce qu'ils expriment bien notre expérience, et nous y sommes parfaitement habitués, tandis que les concepts de la Relativité restreinte sont en contradiction avec eux. Newton écri-

vait *) que l'espace absolu, de par son propre sens, sans rapport à quoi que ce soit d'extérieur, demeure toujours le même et immobile.

Si l'on se fie à Newton, l'espace se présente comme une caisse vide, dans laquelle sont placés des corps matériels et se déroulent des phénomènes physiques. Cependant Newton se rendait compte de la justesse du principe galiléen en mécanique. Celui-ci traduit l'équivalence du repos et du mouvement rectiligne et uniforme. Comment alors dans ces conditions déceler l'espace immuable, absolu? Pour simplifier nos raisonnements, admettons, pour le moment, que le référentiel choisi privilégié de Newton (espace immobile, absolu) soit un système héliocentrique, bien que, comme nous allons le voir, il n'existe point de tels systèmes privilégiés.

En ce qui concerne le temps, Newton écrivait que le temps absolu, le vrai temps mathématique, pris dans son propre sens sans rapport à l'extérieur, est d'un cours uniforme et s'appelle autrement durée.

D'après Newton le temps, lui aussi, est donc une chose extranaturelle. Ainsi, d'après les concepts de Newton, le temps et l'espace existent en soi et sont indépendants des corps matériels qui se trouvent dans l'espace. Les idées de Newton sur l'espace et le temps nous semblent évidemment scolastiques. On se demande seulement comment elles arrivent à soutenir la mécanique durant trois siècles. La réponse est simple : les écarts des lois classiques sont sensibles plutôt dans les conditions artificielles ou cosmiques que dans la vie courante. Notons en conclusion que la physique moderne rejette la notion de l'espace absolu en envisageant tous les systèmes d'inertie comme équivalents. La science d'aujourd'hui aboutit à la conclusion que le cours de temps est différent dans divers systèmes de référence. Et aussi les propriétés de l'espace ne sont-elles pas données à l'avance une fois pour toutes mais se déterminent par les corps qui se trouvent dans l'espace. Cette dernière affirmation est justifiée par la Théorie de la relativité générale d'Einstein qui complète et développe les idées de la Relativité restreinte. Le fait même que les propriétés de l'espace (géométrie du monde réel) ne sont pas prédéterminées mais dépendent de la répartition de la matière dans cet espace est une conclusion très importante de la Théorie de la relativité générale. Cela répond plus exactement que les idées de Newton sur l'espace et le temps absolus aux concepts du matérialisme dialectique, selon lesquels l'espace et le temps sont les formes de l'existence de la matière.

6. Généralisation du principe de la Relativité galiléen. Le principe en question ne s'étendait qu'aux phénomènes mécaniques. Nous avons montré que le principe fondamental de la mécanique sous sa forme différentielle avec la transformation de Galilée satisfaisait au

---

*) « Philosophiae Naturalis Principia Mathematica » (1687).

principe de la Relativité galiléen, ce qui signifiait du point de vue formel que lors de la transformation de Galilée, l'équation (4) demeurait la même, seules changeaient les désignations des variables. Une question se pose tout naturellement : pourquoi le principe de la Relativité n'embrasse que les phénomènes mécaniques ? Tous les phénomènes de la nature étant étroitement liés entre eux, la limitation du principe de relativité par la mécanique seule ne semble pas logique. Pourquoi donc ne pas admettre que tous les phénomènes physiques ont la même nature dans tous les systèmes d'inertie si les conditions initiales étaient identiques ? Autrement dit, pourquoi les systèmes d'inertie ne seraient-ils pas équivalents par rapport à tous les phénomènes physiques ?

Il paraît de prime abord que les équations de l'électrodynamique contredisent l'équivalence des systèmes de référence d'inertie.

En effet, le système d'équations fondamentales de l'électrodynamique — système d'équations de Maxwell — change sa forme lors de la transformation de Galilée, c.-à-d. que ces équations ne sont pas covariantes par rapport à cette transformation de Galilée. Les phénomènes électromagnétiques ne se déroulent donc pas de la même façon dans différents systèmes de référence. Encore une chose prouve, paraît-il, la justesse de cette conclusion. Dans un référentiel (appelons-le K), pour lequel est vérifié le système d'équations de Maxwell, la vitesse de la lumière dans le vide est égale à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, où ε_0 est la permittivité électrique du vide, et μ_0, perméabilité magnétique du vide (toutes les deux étant exprimées en unités du SI). Il est admis de désigner cette grandeur par la lettre c. Soulignons une fois de plus qu'il s'agit ici de la vitesse de la lumière dans le vide. Le vide est, pour ainsi dire, tout à fait équivalent par rapport à tout système d'inertie, car il ne peut être lié à aucun d'entre eux, c.-à-d. qu'il est impossible d'indiquer le référentiel où le vide soit au repos. Donc, soit c la vitesse de la lumière dans le vide pour le référentiel K. En passant du système de référence d'inertie K au système K' on obtient, en vertu du théorème de la composition des vitesses (3), pour la vitesse de la lumière dans le vide $c' = c - V$. Il en découle que, si la vitesse de la lumière est égale à c dans le système K, elle ne sera pas la même pour tous les autres systèmes de référence qui se déplacent par rapport à K. Le système K est donc privilégié. Autrement dit, il est prouvé que dans le domaine des phénomènes électromagnétiques le principe de la relativité n'est pas valable.

Logiquement, trois possibilités s'ouvraient devant les physiciens :

1. On pourrait admettre que le principe de la relativité n'agissait que dans la mécanique, donc ne se rapportait pas à l'électrodynamique qui posséderait un système de référence « absolu ».

2. On pourrait supposer que le principe de la relativité était universel. Alors le système d'équations de Maxwell ne satisfait pas à ce

principe (il change sa forme lors de la transformation de Galilée) et on ne peut pas l'admettre.

3. En admettant que le principe de la relativité soit valable pour tous les phénomènes de la nature et que le système d'équations de Maxwell soit vérifié, le passage d'un système d'inertie à l'autre ne sera pas décrit par la transformation de Galilée (qui fait changer la forme des équations de Maxwell). Cependant une nouvelle transformation quelconque pourrait changer la forme des équations de la mécanique. Ainsi, il faut transformer ces équations de manière qu'elles restent covariantes par rapport à cette nouvelle transformation.

Le choix entre ces possibilités ne pourrait être fait finalement que par voie d'expérimentation. L'expérience se prononça en faveur de la dernière possibilité : admettre le principe de la relativité en tant que principe universel en transformant les équations de la mécanique. Or, les recherches des formules de transformation des coordonnées et du temps qui satisferaient aux données expérimentales aboutirent à la révision des notions mêmes de l'espace et du temps.

Notons également qu'il serait désirable que le principe de la relativité ait le caractère universel dans tous les systèmes d'inertie vu que le choix du référentiel, comme on a déjà remarqué, n'influe pas sur la nature des processus physiques.

7. Vitesse de la lumière dans le vide. La vitesse de la lumière dans le vide joue un rôle très important dans la physique moderne et occupe une place particulière dans la nature, car elle est la plus grande vitesse possible de la transmission de l'interaction (signal, information) entre les corps. Comme l'expérience le montre la modification de l'état d'un corps (par exemple, le changement de ses coordonnées, de sa vitesse, de sa charge, etc.) est ressentie par l'autre corps éloigné du premier quelque temps après. Nous jugeons le plus souvent de l'influence réciproque des corps (de leur interaction) d'après les forces agissant de la part de chaque corps. Mais les forces dépendent de l'état de chaque corps. Il en découle que les forces, elles aussi, se propagent d'un corps à l'autre avec une certaine vitesse ; la propagation de l'interaction est appelée « signal » envoyé par un corps et portant une information de la modification de l'état de ce corps à l'autre. La vitesse de la propagation de l'interaction est appelée vitesse de propagation du signal ou de l'information.

Rien n'indique qu'il existe dans la nature la limite supérieure pour la vitesse de propagation des signaux. Cependant, la théorie et l'expérience confirment l'existence de la vitesse limite de la transmission des interactions qui est celle de la lumière dans le vide (rappelons que c'est également la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques de toute fréquence dans le vide). Comme on l'a déjà dit, la mécanique classique suppose tacitement qu'un signal se transmette à la vitesse infinie.

Si l'on suppose qu'il existe, dans la nature, une vitesse limite des signaux, on doit admettre qu'elle soit la même dans tous les référentiels d'inertie. En effet, tous ces systèmes sont équivalents et aucune expérience physique ne peut les différencier. Si la vitesse limite des signaux (celle de la lumière) différait selon les systèmes de référence, elle permettrait de les distinguer l'un de l'autre, ce qui est impossible vu le caractère universel du principe de la relativité. On en déduit que la vitesse de la lumière dans le vide est nécessairement la même dans tout référentiel d'inertie.

Qu'arriverait-il si la source se déplaçait vers l'observateur ou vice versa ? Ce mouvement ne modifiera point la valeur de la vitesse limite de transmission du signal. Par conséquent, la vitesse de la lumière dans le vide ne peut dépendre ni du mouvement de la source, ni de celui de l'observateur.

Ainsi donc, l'hypothèse de l'indépendance de la vitesse de la lumière dans le vide du choix du système d'inertie est logiquement tout à fait vraisemblable. Toutefois, c'est l'expérience qui peut vérifier définitivement cette hypothèse. On le verra au paragraphe 8. Pour l'instant, notons que la Théorie de la relativité commence avec la découverte de la *finitude de la vitesse de la lumière.*

La vitesse de la lumière, est-elle finie ou non — cette question fut largement discutée au XVII siècle. Descartes la croyait infinie, tandis que Galilée insistait sur sa finitude et chercha même à la mesurer (1607). Des possibilités techniques du temps de Galilée vouèrent cette tentative à l'échec. La première détermination de la vitesse de la lumière à la base des observations astronomiques fut entreprise par Römer (1676). Par des expériences terrestres, cette détermination fut faite par Fizeau (1849). Depuis ces premières expériences, la vitesse de la lumière dans le vide fut mesurée à l'aide de différentes méthodes et avec une précision toujours croissante. Prenons le nombre approximatif qui est égal à $3 \cdot 10^{10}$ cm/s $= 3 \cdot 10^8$ m/s.

Bien que pour l'édification de la Relativité restreinte il suffise d'admettre l'universalité du principe de la relativité galiléen et la constance de la vitesse de la lumière dans tous les systèmes de référence, nous consacrerons le paragraphe suivant aux idées et expériences qui précédèrent la création de la Relativité restreinte. L'expérience physique joua un rôle très important dans la formation des concepts de la Relativité restreinte. Pourtant, le lecteur qui sera satisfait par une manière axiomatique d'aborder le problème peut s'adresser immédiatement au chapitre II.

8. **Quelques expériences qui sont à la base de la Relativité restreinte.** L'évolution de la théorie de la relativité restreinte est marquée par de nombreuses expériences physiques dont celles de la mécanique, de l'électricité et de l'optique. Il n'est pas tout de même nécessaire de les citer toutes.

Afin d'en comprendre la raison, il faut aborder le problème des rapports qui existent entre l'expérience physique et la théorie. Connaître la nature signifie mettre en évidence les lois qui la traduiraient d'une façon adéquate, ou, en langage de philosophie, les lois objectives qui régissent le monde objectif hors de notre conscience. La nature est étudiée par l'homme et ce processus n'est pas exempt de traits subjectifs venant de l'homme lui-même, sans parler d'erreurs inévitables. Par conséquent, les lois de la nature sont nécessairement soumises à l'épreuve de l'expérience. Quels sont les critères de validité des lois physiques? Elles sont vérifiées par la pratique. La vérification des lois par divers chercheurs et en des lieux différents aussi bien que la vérification répétée maintes fois par un seul chercheur représentent une garantie de la conformité de notre connaissance aux vraies lois physiques. La méthode-base de la vérification des lois physiques et de la mise en évidence des régularités dans la nature consiste en création des conditions artificielles nécessaires, c.-à-d. en réalisation de l'*expérience physique*.

Mais la physique ne peut pas être constituée seulement par des résultats des expériences. Il est impossible de l'imaginer sans la théorie permettant de systématiser et d'expliquer les différents phénomènes de la nature en partant d'un nombre réduit des lois fondamentales. A son tour, la théorie physique qui représente maintenant une science à part, la physique théorique, est étroitement liée aux mathématiques. L'accumulation des données expérimentales fait naître une théorie qui explique un certain groupe de phénomènes. Peut-on confirmer ou réfuter la théorie par une ou plusieurs expériences? Evidemment, nous écartons les fautes qu'on arrive finalement à dépister. D'autre part, les limites de la validité de la théorie sont parfois évidentes et il ne faut pas chercher à les franchir. Avec ces restrictions on peut aboutir à la conclusion suivante: si l'une des expériences effectuée dans les limites de la théorie contredit la théorie, celle-ci ne peut être reconnue comme conforme à la réalité. La vérification d'une loi ou d'une théorie par la confrontation des conclusions théoriques avec les résultats de l'expérience n'est jamais définitive quel que soit le nombre d'expériences confirmant la théorie. Cette dernière est correcte tant que ces conclusions ne contredisent pas quelque nouvelle expérience se rapportant au champ d'action de cette théorie.

Cette situation est assez typique. Dans les mathématiques la justesse d'un théorème général n'est pas démontrée par sa validité dans des cas particuliers mais un seul contre-exemple peut le démentir. Certes, la physique, à la différence des mathématiques, est une science expérimentale. Le processus de la connaissance est continu et illimité. Le problème de la recherche de la vérité « absolue » appartient plutôt à la philosophie qu'à telle ou telle science particulière. Certaines expériences physiques peuvent mettre en évidence des régularités particulières ou, en langage de philosophie, des vérités relatives.

Bien que ces lois comportent des éléments de la vérité absolue, elles ne donnent pas une connaissance complète. Finalement, toute théorie s'avérera soit bornée soit démentie. A une étape donnée du développement de la physique une théorie est considérée comme juste tant qu'il n'y a pas de données expérimentales en désaccord avec elle. Cette digression a pour but d'expliquer la raison pour laquelle nous préférons décrire des expériences « négatives » marquant l'échec d'une telle ou telle hypothèse.

On verra que les lois de la mécanique classique, y compris la transformation de Galilée, deviennent incorrectes lorsque les vitesses des corps deviennent voisines de celle de la lumière c. Dans ces cas la mécanique classique cède sa place à la Relativité restreinte. Les vitesses ayant rapport à la propagation de la lumière sont très grandes, c'est pourquoi des phénomènes lumineux relèvent du domaine de la Relativité restreinte. En effet, les phénomènes optiques furent de l'importance capitale pour le développement de la Relativité restreinte. Mais nous sommes obligés de repartir de loin et de rappeler brièvement l'évolution des concepts sur la nature de la lumière.

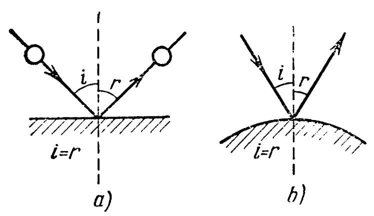


Fig. 3. *a*) Le bord du billard fait rebondir la bille selon la loi : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. *b*) La même loi régit la réflexion de la lumière.

Il n'est pas si simple de répondre à la question ce qu'est la lumière. Au début du XVIII[e] siècle, deux points de vue sur la nature de la lumière, ceux de Newton et de Huygens, firent l'apparition. Il fut facile à admettre le point de vue de Newton vu que le succès brillant de sa mécanique fit chercher l'interprétation mécanique de la lumière. Newton crut que la lumière était composée de corpuscules. Les propriétés essentielles de la lumière, à savoir la propagation rectiligne dans un milieu homogène, les lois de réflexion et de réfraction, s'expliquaient facilement en partant de la théorie corpusculaire. Dans un milieu homogène, le corpuscule n'est soumis à aucune force et se déplace d'un mouvement rectiligne et uniforme. La réflexion se produit d'après la loi du choc élastique (notons en guise d'exemple le choc d'une bille contre le bord du billard). Dans ce cas, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion (fig. 3, *a*).

Si, à la surface de séparation des milieux *I* et *II*, le corpuscule est soumis à l'action des forces dirigées suivant la normale à la surface de séparation vers le milieu réfringent, il change la direction de son mouvement. Soient V_n et V_t les composantes de la vitesse de la bille dans le milieu *I*. Les forces agissant au niveau du dioptre provoquent l'augmentation de V_n, la direction de la vitesse change, donc la « réfraction » a lieu (fig. 4).

D'autre part, on tire de l'optique géométrique que la lumière passant du milieu à l'indice absolu n_1 au milieu à n_2, subit la réfraction. La relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r est traduite par la loi de Descartes-Snellius:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

L'hypothèse de Newton explique qualitativement la réfraction de la lumière.

Certaines propriétés de la lumière ne cadraient pas, du point de vue de Newton lui-même, avec sa théorie. Rappelons ne serait-ce

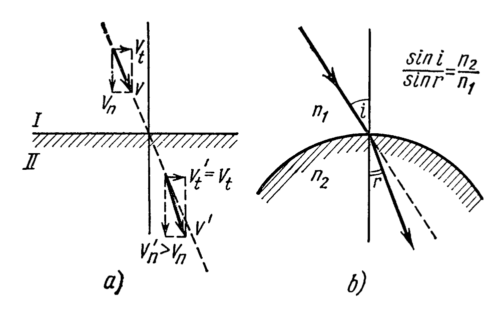


Fig. 4. *a*) Changement de direction du mouvement du corpuscule lors de son passage du dioptre des milieux *I* et *II*. La surface de séparation traversée, on a $V_n' > V_n$, mais $V_t' = V_t$ et la direction de la vitesse change. *b*) La réfraction de la lumière consiste en changement de la direction du rayon lumineux lors du passage du dioptre. L'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r sont reliés par la loi de Descartes-Snellius $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$.

que les « anneaux de Newton » dans l'optique qui sont une manifestation des interférences. Newton inventa des schémas artificiels pour conserver ses corpuscules. Cependant, à la même époque, Huygens émit l'hypothèse de la nature ondulatoire de la lumière qui fut inspirée par celle des ondes sonores. Mais la nature des oscillations lumineuses restait vague. Huygens comprit que la lumière se propageait là où le son ne le pouvait plus (on voit à travers la paroi transparente d'une cloche vidée d'air qu'un marteau frappe un carillon sans qu'on en entende le son). Il en découle que la lumière se propage dans un milieu spécial que Huygens nomma *éther*. Newton s'opposa énergiquement à cette hypothèse. S'en suivit alors une discussion animée dont le contenu ne relève pas du sujet du présent ouvrage. Nous renvoyons le lecteur intéressé au livre passionnant d'Einstein et d'Infeld intitulé « L'évolution des idées en physique » (Paris, Petite Bibliothèque Payot, 1963).

L'autorité incontestable de Newton contribua à ce que son hypothèse régnait pendant un siècle. Mais toute théorie demeure vraie

tant qu'elle ne soit pas contestée par des faits expérimentaux. Le XIX[e] siècle débuta par les découvertes des phénomènes qui témoignèrent de la nature ondulatoire de la lumière. Les phénomènes des interférences et de la diffraction furent objets des études minutieuses. La théorie ondulatoire de la lumière expliqua également la propagation rectiligne de la lumière. La découverte de la polarisation mit à jour la transversalité des ondes lumineuses.

Il est admis de croire qu'au XIX[e] siècle la théorie ondulatoire de la lumière triompha. Il paraissait incontestable que la lumière était un phénomène ondulatoire. Mais dans quel milieu donc se produisaient des oscillations lumineuses? Ce milieu fut déjà prévu par Huygens et appelé, par lui-même, éther. Il ne restait qu'à déterminer les propriétés physiques de l'éther.

Comme la physique du XIX[e] siècle abondait en concepts mécaniques, il n'est pas étonnant qu'on les appliquât à décrire l'éther qui posséderait dorénavant les propriétés d'un solide (les ondes transversales ne se propagent que dans de tels milieux). C'était certes un corps bien étrange : on ne le sentait pas lors du mouvement, il était invisible, impalpable, mais on n'eut pas le choix.

Mais si l'on fait abstraction de la question difficile à repondre sur les propriétés de l'éther, il en reste une autre non moins compliquée : à quel système de référence est lié l'éther, c.-à-d. dans quel système est-il au repos? La nature, semble-t-il, y prépara la réponse.

Il s'agit de l'*aberration* de la lumière. Si l'on observe un rayon de lumière à partir de deux référentiels se mouvant l'un par rapport à l'autre, il sera vu sous les angles différents par rapport à quelque direction commune à ces deux systèmes (par exemple, à la direction de la vitesse relative). S'il s'agit de l'observation des rayons lumineux avec une lunette optique, la direction apparente des rayons traversant la lunette se confond avec son axe. Pourquoi alors le mouvement de l'observateur (lunette) modifie-t-il la direction apparente de la lumière incidente? La signification du phénomène peut être rendue claire par un exemple mécanique. Soit une bille tombant uniformément avec la vitesse c suivant la verticale. Elle doit traverser un tube de longueur l se mouvant, lui, dans le sens horizontal à la vitesse V de façon qu'elle ne touche pas les parois du tube. Pour cela, la bille doit toujours suivre l'axe BB'' du tube. En particulier, lorsque la bille arrivera au point B', l'extrémité inférieure B du tube doit s'y trouver. Il est évident que celui-ci doit être incliné en avant suivant le mouvement. L'angle φ que le tube fait avec la verticale est aisément défini. Soit $B''B' = l \cos \varphi$ le chemin parcouru par la bille au bout du temps τ. Durant le même intervalle de temps l'extrémité B couvre la distance $BB' = l \sin \varphi$. Comme $l \cos \varphi = c \cdot \tau$ et $l \sin \varphi = V \cdot \tau$, il en découle que $\operatorname{tg} \varphi = V/c$ (fig. 5, *a*).

Du point de vue de la théorie corpusculaire les corpuscules lumineux jouent le rôle des billes. Par suite l'axe du télescope doit être

incliné en avant suivant le mouvement. La même conclusion est tirée de la théorie ondulatoire. Pour ne pas perturber le front d'ondes lumineuses (V, la vitesse du tube et c, la vitesse de la lumière), il faut incliner le tube d'un angle φ, dont la tangente est $\text{tg}\ \varphi = V/c$ (fig. 5, *b*).

Qu'est ce que l'*angle d'aberration*? C'est la variation de l'angle apparent sous lequel le rayon lumineux est vu au passage d'un système de référence à un autre. Mais il est impossible évidemment de découvrir cet angle dans un seul système de référence, car la direction d'une étoile éloignée sera toujours la même. Toutefois les observations des astres depuis la Terre permettent de relever l'aberration,

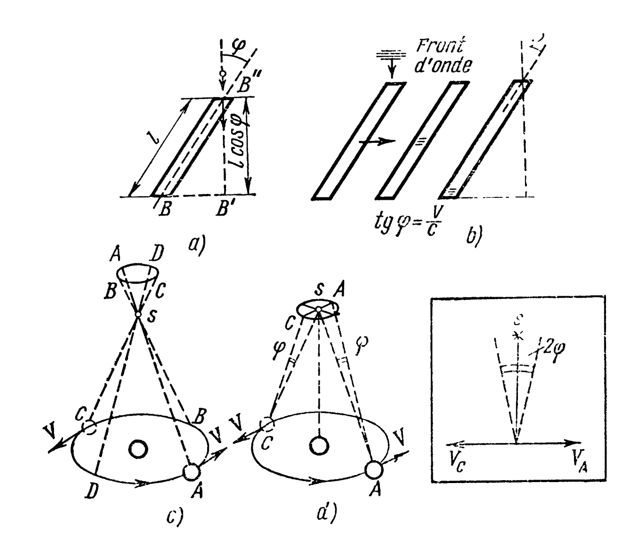


Fig. 5. *a*) La bille en chute verticale doit passer à travers le tube se déplaçant horizontalement à la vitesse V. *b*) Le front d'ondes doit traverser sans se perturber le tube se déplaçant horizontalement à la vitesse V. *c*) L'apparition du déplacement parallactique de l'étoile située au pôle de l'écliptique, due à l'évolution de la Terre. Ce déplacement se traduit par une petite ellipse qui se forme au cours d'une année. La position de l'observateur sur Terre a une importance particulière; l'observateur situé, par exemple, en A verra sur la sphère céleste l'étoile A (la position de l'étoile, elle aussi, est désignée par la lettre A). *d*) L'aberration de la lumière et le déplacement de la Terre sur son orbite font décrire au cours d'une année une ellipse à l'étoile située au pôle de l'écliptique. Cependant, les positions respectives de la Terre et de l'étoile diffèrent de celles données par la figure *c*). Ce fait permet de distinguer les déplacements dus à la parallaxe et à l'aberration.

L'image expliquant la formation de l'angle d'aberration lors de l'inversion de sens du déplacement de la Terre (en une demi-année) est donnée dans le cadre.

car la Terre évolue suivant une ellipse et, par conséquent, ne représente le même référentiel d'inertie que pendant un intervalle de temps limité. Tous les six mois, la direction du mouvement orbital de la Terre est inversée. La direction apparente de l'étoile, dans ces conditions, s'en trouve modifiée tous les six mois.

L'astronome anglais Bradley chercha la trajectoire parallactique des étoiles, c.-à-d. la trajectoire apparente décrite par une étoile en une année vu le changement de la position de l'observateur. La fig. 5, *c* éclaircit comment apparaît le déplacement parallactique apparent d'une étoile polaire. Au cours d'une année, l'étoile décrit une petite ellipse disposée d'une façon caractéristique par rapport à l'orbite de la Terre.

En 1728 lors des recherches entreprises, Bradley découvrit l'aberration de la lumière grâce à l'ellipse que décrivent les étoiles à proximité du pôle de l'écliptique et dont le demi grand axe est de 41″. L'ellipse était pourtant orientée tout à fait autrement que l'on devrait avoir pour le déplacement parallactique (fig. 5, *d*).

Une étoile *s* dont l'orientation est perpendiculaire au plan de l'orbite est observée de deux positions *A* et *C* diamétralement opposées. Pour ces deux positions l'angle repérant la direction de l'étoile varie de 2φ tous les six mois. Sur la figure, φ désigne l'angle entre la direction de l'observation de l'étoile *s* depuis la Terre, que l'on aurait dû avoir si la Terre avait était immobile, et la direction apparente de l'étoile *s*. Dans une demi-année, le même angle aura une orientation opposée et l'angle que feront les deux directions apparentes de l'étoile *s* sera égal à 2φ. L'angle d'inclinaison de la lunette se détermine aisément de notre calcul élémentaire. La lumière provenant de l'étoile polaire tombe normalement au plan de l'orbite terrestre. Le mouvement de la Terre est dirigé perpendiculairement à la direction du rayon. La vitesse de la Terre est de 30 km/s, celle de la lumière $3 \cdot 10^5$ km/s. D'où $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{V}{c} = 20'',5$ et $2\varphi = 41''$. C'est exactement la valeur que trouva Bradley. Il vit alors qu'il avait trouvé non pas la parallaxe de l'étoile immobile (découverte cent ans après par Bessel) mais l'aberration de la lumière. Bradley interpréta l'aberration du point de vue de la théorie corpusculaire à peu près de la même manière que plus haut. La théorie ondulatoire fournit la même explication. Mais celle-ci suppose que la lumière se propage dans l'éther immobile par rapport au système héliocentrique, sinon les rayons lumineux ne seraient pas normaux au plan de l'orbite terrestre. Ainsi donc, l'éther est immobile par rapport au système héliocentrique, tandis que tous les autres référentiels d'inertie se déplacent par rapport à l'éther. Ce n'est pas évidemment la réponse définitive et nous retournerons à l'aberration dans les paragraphes 19 et 48. Toutefois, avant l'apparition de la Relativité restreinte, l'aberration de la lumière fut vue sous cette optique.

Mais l'éther immobile dans le système héliocentrique doit produire un « vent » sur la Terre qui se déplace sur son orbite. Peut-on découvrir ce dernier expérimentalement ? Maxwell proposa une expérience dont le principe est expliqué par le schéma de la figure 6. Deux cellules photoélectriques sont fixées sur un banc optique parallèle à la vitesse du déplacement de la Terre sur l'orbite. Au milieu du banc est disposée une source lumineuse I. Un bref éclat de lumière est produit par la source. La lumière se propage dans l'éther immobile avec la célérité c. La cellule P_1 va à la rencontre de la lumière tandis que P_2 la fuit.

Vers P_1 la lumière se propage à la vitesse $c + V$ et vers P_2 à la vitesse $c - V$. Alors P_1 fixe la lumière avant P_2 de l'intervalle de temps

$$\Delta t = \frac{l}{c-V} - \frac{l}{c+V} = 2l \frac{V}{c^2} \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

En prenant, à titre d'exemple, $l = 10^4$ cm, $V = 3 \cdot 10^6$ cm/s (vitesse orbitale de la Terre) et $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s, on peut s'assurer que la valeur de Δt est très petite ($\Delta t \sim 10^{-10}$ s). Sans doute, sous cette forme primitive l'expérience est vouée à l'échec.

Maxwell proposa un schéma pratique de l'expérience qui se base sur les interférences de la lumière. Cette expérience aurait décelé le mouvement de la Terre par rapport à l'éther si la lumière cheminait vraiment dans l'éther qui, lui, serait au repos dans le système héliocentrique.

Fig. 6. Le banc optique est muni d'une source lumineuse I et de deux cellules photoélectriques P_1 et P_2. Il est disposé parallèlement à la vitesse du mouvement de la Terre sur l'orbite. Si la lumière se propage à travers l'éther immobile, l'éclat de lumière chemine vers P_1 avec la vitesse $c + V$ et vers P_2 avec la vitesse $c - V$. Par conséquent, la lumière atteint P_1 avant P_2.

Le schéma de l'expérience de Michelson réalisée en 1881 d'après l'idée de Maxwell est représenté sur la fig. 7. Un faisceau lumineux issu de la source I tombe sur une glace P légèrement argentée et semi-transparente. Une partie du faisceau se réfléchit tandis que l'autre partie traverse la glace. L'appareil de Michelson (qu'on appelle maintenant *interféromètre de Michelson*) est muni de deux miroirs S_1 et S_2 dont la disposition est indiquée sur la figure ; les distances L_1 et L_2 séparent les miroirs de la glace P. Toutes les parties de l'interféromètre sont rigidement fixées sur une plaque lourde flottant dans le mercure afin de pouvoir tourner doucement le système tout entier.

Lorsque le rayon issu de la source tombe sur la glace, il se sépare en deux rayons : le rayon *1* dirigé vers le miroir S_1 et le rayon *2*

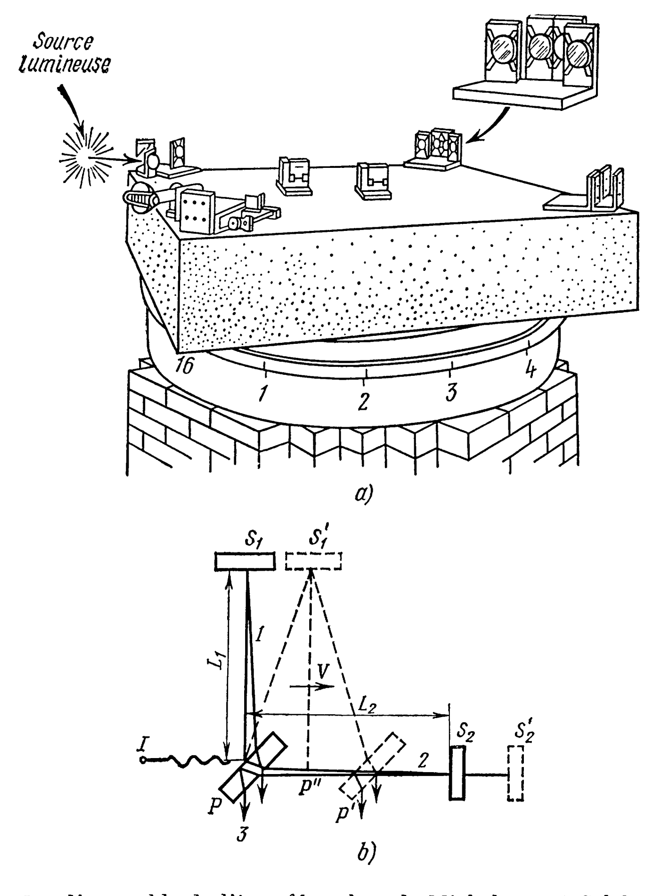


Fig. 7. *a*) Vue d'ensemble de l'interféromètre de Michelson. *b*) Schéma de principe de l'expérience de Michelson. Le rayon lumineux issu de la source *I* se sépare sur la glace *P* semi-transparente en deux rayons *1* et *2* dirigés parallèlement et perpendiculairement au mouvement orbital de la Terre. La vitesse du mouvement de la Terre est marquée par une flèche et par la lettre *V*. Les rayons *1* et *2*, réfléchis sur les miroirs S_1 et S_2 respectivement retournent à la glace ***P***. Après la réflexion et la réfraction, deux rayons prennent la direction *3* en interférant. L'étape cruciale de l'expérience, c'est la rotation de tout l'appareil de 90°; le rayon *1* prend maintenant la direction du mouvement de la Terre, le rayon *2* est perpendiculaire au mouvement. Si la lumière s'était propagée dans l'éther immobile, la différence optique de propagation des rayons *1* et *2* aurait changé en affectant les interférences observées dans la direction *3* (les franges se seraient déplacées). L'expérience n'a donné aucun déplacement des franges.

dirigé vers le miroir S_2. Chaque rayon, après avoir atteint le miroir correspondant, retourne à la glace P. Grâce à la semi-transparence de celle-ci, une certaine partie de la lumière de chacun de ces rayons se

propage suivant la direction *3*. Puisque chacun des deux rayons *1* et *2* représente une fraction du rayon primitif, les rayons *1* et *2* empruntant la direction *3* sont cohérents et peuvent interférer. Si la différence de phase de ces rayons est nulle, ils s'amplifieront ; si la différence de phase est égale à $\frac{\pi}{2}$, ils s'affaibliront. Si les bras L_1 et L_2 de l'interféromètre sont égaux et que le dispositif soit au repos dans l'éther, les temps aller et retour que mettent les rayons *1* et *2* pour parcourir les distances entre la glace et les miroirs seront les mêmes. Mais, si le dispositif se déplace par rapport à l'éther, les temps seront différents. Etudions donc le cas où le dispositif se meut relativement à l'éther avec une vitesse V.

Trouvons le temps aller et retour du rayon *2* entre P et S_2. Comme la vitesse de la lumière dans l'éther est c et le miroir S_2 se meut avec la vitesse V par rapport à l'éther (la lumière « rattrape » le miroir), alors le temps mis pour la propagation à droite, jusqu'à S_2, que nous désignons par t_2', est égal à :

$$t_2' = \frac{L_2}{c-V} .$$

Le temps que met la lumière pour couvrir la distance S_2P (la lumière chemine vers la glace qui va en sens inverse) t_2'' est égal à :

$$t_2'' = \frac{L_2}{c+V} .$$

Le temps total aller et retour que met le rayon *2* pour parcourir la distance entre P et S_2 est égal à :

$$t_2 = t_2' + t_2'' = \frac{L_2}{c-V} + \frac{L_2}{c+V} = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}} .$$

Trouvons maintenant le temps t_1' au bout duquel le rayon *1* couvrira la distance de P à S_1. Pendant le temps t_1' le miroir S_1 se déplacera de Vt_1' et la lumière couvrira suivant l'hypoténuse du triangle $PS_1'P''$ la distance ct_1'. Il vient du triangle rectangle :

$$(ct_1')^2 = L_1^2 + (Vt_1')^2,$$

d'où

$$t_1' = \frac{L_1}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{L_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} .$$

Comme le retour de la lumière de S_1' à la glace en position P' s'effectue suivant l'hypoténuse $S_1'P'$ du triangle égal au triangle $PS_1'P''$, le temps aller et retour t_1 du rayon *1* entre P et S_1 est égal à

$2t'_1$, c.-à-d.:

$$t_1 = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Les temps t_1 et t_2 se distinguent par le facteur $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$. Ce dernier indique la variation du temps due au mouvement de l'appareil; la variation de l'intervalle de temps lors du mouvement par rapport à l'éther n'est pas identique même au cas où $L_1 = L_2$.

L'expérience se réalise de telle sorte que le bras de l'interféromètre soit orienté parallèlement à la direction du mouvement orbital de la Terre (c'est facile à réaliser à n'importe quel instant d'après les données astronomiques). L'expérience est toujours effectuée en présence du vent d'éther car la Terre est incessamment en mouvement par rapport à celui-ci (d'après l'hypothèse). Par conséquent, il s'avère impossible de comparer les interférences « sans le vent d'éther » à celles « avec le vent ». La disposition du bras PS_1 suivant la vitesse orbitale V définit les franges d'interférence, c.-à-d. la succession de raies claires et sombres. Pourquoi justement l'alternation de raies? Remarquez que les franges ne s'obtiennent qu'avec un faisceau légèrement divergent issu de la source. Pour plus de détails, on peut s'adresser aux ouvrages suivants: *Physical optics*, By Robert W. Wood, 3d. ed. [Reprint], New York, Macmillan, 1943 ou G. Landsberg *Optique*.

Peut-on déceler d'après les interférences s'il y a la différence entre les temps t_1 et t_2? Même si cela était possible, il aurait fallu atteindre une égalité exacte des bras L_1 et L_2. Comme pratiquement on n'est pas en mesure de les rendre égaux, il faut éliminer l'influence de l'inégalité des bras. Le procédé suivant permet de contourner cette difficulté dans l'expérience de Michelson. On tourne tout l'ensemble de l'appareil de 90° de façon que les bras du dispositif changent de place. Sous ces conditions, seul le mouvement par rapport à l'éther est responsable de l'inégalité des intervalles de temps t_1 et t_2, qui est définie par le déplacement des franges d'interférence lors de la rotation du système.

Michelson aurait décelé un « vent d'éther » ayant la vitesse de 10 km/s. Tous les physiciens qui furent au courant de l'expérience en préparation ne doutèrent point que l'éther se ferait signaler. Or, on n'eut aucune preuve de son existence. L'expérience de Michelson fut reprise maintes fois avec une précision toujours croissante; de nos jours, on pourrait déceler un « vent » ayant une vitesse de 30 m/s, mais le résultat obtenu par Michelson, ou, comme on dit souvent, le résultat négatif de l'expérience de Michelson, demeure immuable. Ainsi, sa véracité n'est plus douteuse.

Une fois les physiciens convaincus par la mise correcte de l'expérience (elle fut effectuée pour la première fois en 1881), ils se crurent obligés de chercher l'interprétation théorique de son résultat. De 1881 à 1905, plusieurs hypothèses furent émises qui permettaient d'expliquer le résultat de Michelson. D'après la première hypothèse, celle de Lorentz et Fitzgerald, tous les corps se mouvant par rapport à l'éther immobile se contractent de $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ fois dans le sens de leur mouvement (« contraction de Fitzgerald-Lorentz »). Cette hypothèse aspirait à garder intact le système de référence privilégié. Bien que celle-ci ait expliqué le résultat de Michelson, d'autres conséquences qui en découlaient et dont la validité n'aurait pu être justifiée que par l'expérience spéciale n'étaient pas confirmées par celle-ci (voir Panofsky et Phillips, *Classical electricity and magnetism*, Addison Wesley).

Selon la seconde hypothèse, tous les corps mouvants « entraînent » l'éther avec eux. Pourtant, comme nous avons déjà vu, l'aberration de la lumière ne « concorde » qu'avec l'éther « immobile dans le système héliocentrique ». En outre, l'expérience posée par Fizeau (voir la page 71 où l'on traite de l'interprétation de cette expérience en Relativité) prouva que l'éther « s'entraînait » partiellement. Seuls ces deux faits faisaient renoncer au système de référence privilégié.

La troisième hypothèse soutenait l'idée que la vitesse constante c de la lumière se rapportait non pas au système de référence mais à la source lumineuse (théories balistiques ou d'émission). La vitesse de la lumière fut toujours considérée comme constante et ne dépendant pas du mouvement du milieu dans lequel elle se propageait. Pour l'observateur par rapport auquel la source est en mouvement, la vitesse de la lumière se compose vectoriellement avec celle de la source. Des théories balistiques expliquent le résultat de l'expérience de Michelson mais les résultats des observations des étoiles doubles firent écrouler cette théorie (cf. Panofsky et Phillips).

Nous voudrions attirer l'attention des lecteurs sur le tableau 14.2 du livre cité de Panofsky et Phillips (nous ne le présentons pas ici car il exige une longue explication) où sont confrontées les expériences mécaniques, électrodynamiques et optiques à la théorie d'éther, d'émission et de relativité. Un tableau vraiment instructif!

En 1905 apparaît l'ouvrage d'Eintsein intitulé « Sur l'électrodynamique des corps en mouvement ». La théorie de la Relativité restreinte y fut presque toute élaborée. La Relativité restreinte expliqua d'une façon naturelle non seulement le résultat de l'expérience de Michelson mais donna l'interprétation correcte de tous les phénomènes connus de la mécanique, de l'électrodynamique et de l'optique. Aucun fait expérimental ne la contredisait. En antici-

pant, résumons les principaux concepts des trois théories mentionnées dans le schéma ci-dessous:

Questions principales	Théorie d'émission	Théorie classique d'éther	Relativité restreinte
Le référentiel privilégié, existe-il ?	Non	Oui; l'éther immobile	Non
La vitesse de la lumière, dépend-elle du mouvement de la source ?	Oui	Non	Non
L'espace et le temps, sont-ils liés entre eux ?	Non	Non	Oui
D'aprés quelle loi se transforment les coordonnées d'un événement en passant d'un système d'inertie à un autre ?	Transformation de Galilée	Transformation de Galilée	Transformation de Lorentz

Même l'analyse très superficielle de ce schéma démontre combien a évolué la science avec la Relativité restreinte. Bien plus la Relativité restreinte aboutit aux conclusions absolument nouvelles dont l'existence n'était même pas mentionnée dans la mécanique classique (l'énergie au repos, par exemple). Einstein fut à un tel point original dans la Relativité restreinte que, comme il a remarqué dans une de ses conversations, il n'était même pas au courant de l'expérience de Michelson, et si même il l'avait sue, il ne se douterait point, d'après ses propres paroles, du résultat [R. S. Shankland, *Talks With Albert Einstein*, Amer. J. Phys. **31**, 47 (1963)]. Cela ressort d'une façon encore plus manifeste d'une lettre d'Einstein récemment découverte [G. Holton, *Einstein and the « Crucial Experiment »* Amer. J. Phys. **37**, 968 (1969)].

Avant d'entrer dans le vif du sujet, citons quelques expériences récentes.

Michelson fut déjà capable, dans ses premières expériences, de déceler la variation de la vitesse de la lumière lors du changement de sa direction par rapport à celle du mouvement de la Terre jusqu'à 150 mm/s. Les chercheurs qui refirent ces expériences plus tard détecteraient cette variation jusqu'à 15 mm/s. L'utilisation des lasers dans le même but la découvrirait jusqu'à 0,03 mm/s. Pourtant, pour l'observateur en mouvement, la variation de la vitesse de la lumière ne fut pas mise en évidence.

On démontra que la vitesse de la lumière dans le vide était indépendante du mouvement de la source. L'une des expériences fut faite avec le Soleil — source extraterrestre (A. Bontch-Brouévitch,

1956). Si la vitesse de la lumière dépendait du mouvement de la source, on aurait alors obtenu, du fait de la rotation du Soleil, des valeurs différentes de la vitesse de la lumière issue des extrémités du diamètre équatorial du Soleil. En observant les interférences de la lumière issue de ces points, il serait possible d'en tirer l'indication sur l'inégalité des vitesses. Mais l'expérience ne donna rien. Une autre expérience, de laboratoire cette fois, consistait en comparaison des temps mis au parcours par des quanta γ d'une distance déterminée, les quanta γ étant issus des sources mobiles et immobiles (noyaux radioactifs). Une nouvelle confirmation de l'indépendance de la vitesse de la lumière du mouvement de la source.

Dans les années 1962-64, les travaux de Cantor prétendaient découvrir le résultat contraire. Mais ses conclusions se sont avérées erronées.

Malgré la précision de plus en plus grande de l'expérience, il n'y a aucune indication sur l'existence d'un système de référence privilégié ni sur la dépendance de la vitesse de la lumière dans le vide des référentiels d'inertie choisis.

CHAPITRE II

LE CONTINUUM D'ESPACE-TEMPS D'EINSTEIN ET DE MINKOWSKI. TRANSFORMATION DE LORENTZ

9. Construction du système de référence dans les systèmes d'inertie. La constance de la vitesse de la lumière dans le vide dans tous les référentiels d'inertie nous permet d'indiquer la recette générale du repérage spatial et de la synchronisation des horloges dans ces systèmes.

Formulons en gros le problème qui est posé. Soient K et K' deux référentiels d'inertie. Un événement A est considéré du point de vue de ces deux référentiels. On entend par coordonnées d'un événement trois coordonnées spatiales (x, y, z) du point avec lequel cet événement coïncide et l'instant t auquel cet événement a lieu. Soient (x, y, z, t) les coordonnées de l'événement A dans le système K et (x', y', z', t') les coordonnées du même événement A dans le système K'. Quelle est la relation entre les coordonnées de l'événement A dans les systèmes K et K' ?

Avant d'aborder ce problème essentiel, il faut savoir s'il est possible de trouver le procédé universel de la construction du référentiel pour tous les référentiels d'inertie, ce qui est nécessaire vu leur équivalence. Nous savons qu'un système de référence est considéré comme établi lorsque chaque point de l'espace est fixé par trois repères spatiaux (coordonnées cartésiennes x, y, z) et est muni d'une horloge. Pour chaque référentiel d'inertie, le système de coordonnées de Descartes s'établit de la façon suivante. Avant tout, il faut fixer l'origine de référence. Pour cela, on choisit un corps matériel quelconque dont le centre d'inertie peut servir d'origine de référence. Ensuite on trace trois axes de coordonnées perpendiculaires. Chaque axe est muni d'une échelle unitaire rigide (pour simplifier, prenons pour tous les trois axes une seule échelle unitaire). La distance de l'origine jusqu'au point de projection sur l'axe correspondant est déterminée par l'application de cette échelle rigide. Les horloges utilisées doivent marcher exactement au même rythme permanent et posséder une origine de référence commune. Autrement il ne serait plus possible de confronter les temps des événements en des points différents de l'espace. L'arrangement des horloges pour qu'elles possèdent la même origine de référence dans le référentiel d'inertie donné s'appelle *synchronisation* des horloges dans ce système. Une telle synchronisation s'effectue de la manière

suivante. Envisageons le cas le plus simple, celui de la synchronisation des horloges fixées le long de l'axe des x. D'abord, on les met aux points dont les coordonnées cartésiennes sont déjà connues. Ensuite l'origine de référence ($t = 0$) est rattachée à l'éclat de lumière ou au signal radio. Dans le vide, la lumière et les signaux radio se propagent à la même vitesse c. Le moment où le signal arrive dans le point donné coïncide avec une certaine indication de l'horloge qui servira de nouvelle origine de temps (non nulle). Par définition, l'origine de référence de chaque point est rattachée à l'instant de temps $t = x/c$ dans le système en question. C'est exactement le temps que mettra le signal pour couvrir la distance entre l'origine de référence et le point x.

Notons que, selon la règle admise dans la Relativité restreinte pour la synchronisation des horloges, tous les événements qui coïncident avec l'arrivée du signal lumineux (onde) émis d'un point arbitraire de l'espace s'avèrent simultanés. Naturellement, tous ces événements sont portés par le même front sphérique de l'onde lumineuse.

Ce procédé de synchronisation est admis pour tout référentiel d'inertie, car la vitesse de la lumière dans le vide a la même valeur dans tous ces systèmes. Ajoutons qu'avec le choix des transformations des coordonnées et du temps, qu'on emploie ici [voir plus bas les formules (8)], on sous-entend l'égalité des échelles de longueurs et des unités de temps pour tous les référentiels d'inertie. Deux événements dans les différents points de l'espace sont considérés comme simultanés dans le référentiel donné s'ils ont lieu, d'après les indications des horloges synchronisées situées dans ces mêmes points, en même temps.

10. Postulats d'Einstein comme principes fondamentaux de la Relativité restreinte. Pour obtenir les lois de transformation des coordonnées d'un événement lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre, il suffit d'admettre deux affirmations connues sous le nom de *postulats d'Einstein*. Le postulat signifie habituellement une proposition qui est indémontrable ; les « postulats d'Einstein » en font un cas spécial, car ils se vérifient expérimentalement. Ils permettent non seulement d'interpréter des résultats expérimentaux mais aussi sont-ils riches en conséquences importantes. Avant tout formulons ces postulats pour en tirer ensuite des conséquences immédiates.

1. Tous les phénomènes physiques se déroulent identiquement dans les référentiels d'inertie si les conditions initiales sont les mêmes. Autrement dit, on ne peut distinguer parmi tous les référentiels d'inertie un système privilégié et il est également impossible de déceler le mouvement absolu. Ce postulat n'est autre que le principe de relativité galiléen étendu à tous les phénomènes de la nature.

2. La vitesse de la lumière dans le vide est constante pour tous les référentiels d'inertie dans toutes les directions et ne dépend ni de la vitesse de la source, ni de la vitesse de l'observateur.

Le premier postulat réduit à néant l'idée de l'éther et de l'espace absolu. Si tous les référentiels d'inertie sont équivalents, le système de référence absolu n'existe pas, et l'éther qui ne peut être simultanément lié à tous les référentiels d'inertie n'existe non plus. Ce postulat met fin à l'existence de l'espace « absolu » de Newton en tant que référentiel privilégié.

On pourrait formuler le second postulat de façon plus laconique en disant que la vitesse de la lumière dans le vide reste invariante dans tous les référentiels d'inertie. En effet, admettons que la source de la lumière soit animée d'un mouvement uniforme et rectiligne. Rattachons-y le système K. Pour ce système, la vitesse de la lumière dans le vide est égale à c, donc, il en est de même pour tout autre système. Si c'est l'observateur qui se déplace d'un mouvement rectiligne et uniforme, cela correspond également au passage d'un référentiel d'inertie à un autre. Pourtant, afin de mettre en relief l'indépendance de la vitesse de la lumière dans le vide du mouvement de la source et de l'observateur, nous avons spécialement souligné ce point dans l'énoncé ci-dessus.

Aux postulats d'Einstein peut être associée une certaine transformation des coordonnées et du temps lors du passage d'un système d'inertie à un autre. Cette transformation est dite transformation de Lorentz. Des conséquences qui en découlent paraissent souvent paradoxales (« réduction des longueurs des échelles », « ralentissement du temps »). Il n'est pourtant pas nécessaire de les tirer de la transformation de Lorentz, car elles se déduisent directement des postulats d'Einstein. Ces résultats « paradoxaux » se mettent en évidence à l'aide de quelques expériences idéalisées. Ces dernières jouent un rôle important dans l'argumentation de la Relativité restreinte ; ce sont des expériences imaginées dont la réalisation pratique n'est absolument pas obligatoire. Au fond, ce ne sont que de simples raisonnements qui permettent de tirer des conclusions des conditions données *). Exposons quelques-unes de ces expériences dont les résultats seront obtenus encore une fois lors de l'étude de la transformation de Lorentz.

11. Quelques expériences idéalisées. Prenons comme d'habitude deux référentiels d'inertie K et K', dont le mouvement relatif

*) On peut trouver des expériences idéalisées (Gedankenexperimente) non seulement dans la Relativité restreinte. Comme exemple on peut citer la discussion de N. Bohr avec A. Einstein concernant la mécanique des quanta, qui abonde en « expériences idéalisées » [Niels Bohr, *Discussion With Einstein on epistemological problems in atomic physics*, The Library of Living Philosophers, Albert Einstein: Philosopher-Scientister, p. 201 (1949)].

est dirigé le long de l'axe commun des x, x'. A l'instant initial $t = t' = 0$, les axes des deux systèmes coïncident. Nous avons déjà vu que le temps t du système K différait du temps t' du système K'.

a) La comparaison des longueurs des règles parallèles disposées perpendiculairement à la direction du mouvement relatif des deux référentiels d'inertie.

Prenons des règles d'une égale longueur pour chacun des référentiels K et K', ce qui n'est pas difficile à faire vu que K et K' sont physiquement équivalents. Choisissant pour unité de longueur la longueur d'onde de l'émission d'un certain atome on peut prendre l'une de ses valeurs multiples pour la longueur d'une règle. Ce procédé doit être universel pour tous les référentiels d'inertie. Dans chaque système plaçons sa règle sur l'axe des y correspondant. La longueur de la règle mesurée dans le système où elle est au repos s'appelle *longueur propre*. Considérons deux règles égales $B'C'$ et BC (fig. 8). Dans chaque système de référence il est possible de trouver les milieux des règles que nous marquons par A et A'. Supposons que les règles se meuvent de façon qu'à la coïncidence des axes des y et y' les points A et A' se confondent. Les systèmes K et K' sont géométriquement identiques à un instant $t = t' = 0$. Quelle est la longueur de la règle $B'C'$ mesurée par l'observateur du système K et quelle est la longueur de la règle BC mesurée par l'observateur du système K' ? Chacun des observateurs marque dans son système simultanément les positions de l'origine et de la fin de la règle qui passe devant lui. Dans le cas considéré on établit aisément la simultanéité de la façon suivante. Depuis les points C' et B', quand ils se trouvent sur l'axe des y, les signaux lumineux sont envoyés vers le point A'. Puisque, dans le système K', les segments $A'C'$ et $B'A'$ sont égaux et la vitesse de la lumière c est constante, les signaux arriveront simultanément dans le point A'. Il s'ensuit que, dans le système K', les points B' et C' couperont simultanément l'axe des y. De même, du point de vue du système K, les points C et B couperont simultanément l'axe des y'. Comme les points C, B, C', B' coïncident avec les axes des y et y' à l'instant initial $t = t' = 0$, cela veut dire que les points C et B, ainsi que les points C' et B', passent simultanément dans les deux systèmes par les axes des y' et des y respectivement. Ainsi, dans les deux systèmes, le temps d'observation des extrémités des deux règles est le même et, par conséquent, les observateurs des deux systèmes peuvent comparer

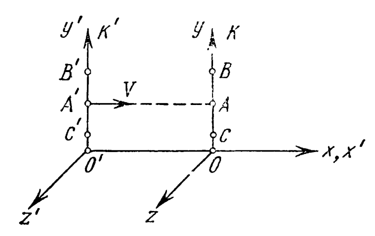


Fig. 8. Expérience idéalisée permettant d'établir que la longueur des règles disposées perpendiculairement à la direction du mouvement relatif des systèmes de coordonnées reste la même par rapport à tout système de référence d'inertie.

leurs résultats. Si $CB > C'B'$ ou, inversement, $C'B' > CB$, les systèmes de référence K et K' ne sont plus équivalents, ce qui est impossible en vertu de l'hypothèse sur l'équivalence de tous les référentiels d'inertie. Les observateurs de K et K' ne peuvent donc constater que l'égalité $CB = C'B'$.

En résumé, les longueurs (et les unités de longueur) dans la direction perpendiculaire à celle du mouvement relatif restent les mêmes par rapport à tout système de référence. Cela signifie, en outre, que les coordonnées des points, elles aussi, ne changent pas s'ils sont situés sur les axes perpendiculaires à la direction du mouvement. Il en découle que ce cas peut satisfaire à la transformation de Galilée :

$$y' = y, \quad z' = z. \qquad (1)$$

b) La comparaison des rythmes des horloges des systèmes K et K'.

En étudiant les rythmes des horloges dans les systèmes K et K' qui se déplacent l'un par rapport à l'autre, on est obligé de comparer les indications d'une seule horloge dans un système avec celles de plusieurs horloges en un autre système, puisque deux horloges appartenant aux systèmes différents ne peuvent se trouver en un même point qu'à un seul instant bien déterminé. L'un des systèmes doit posséder deux horloges au minimum que l'on suppose synchronisées par le procédé indiqué au paragraphe 9. Comparons une horloge du système K' avec deux horloges du système K.

Plaçons à l'origine O' du système K' une horloge et une source de lumière (fig. 9, *a*). A la distance z'_0 de la source (et de l'horloge) sur l'axe des z', on installe un miroir perpendiculairement à la direction du mouvement relatif. Le signal lumineux envoyé par la source se dirige vers le miroir, d'où, réfléchi, il retourne dans le point O' dans un intervalle de temps $\Delta t' = 2z'_0/c$. L'observateur du système K trouvera que ces deux événements (l'émission de la lumière du point O' et l'arrivée de la lumière au point O') auront lieu déjà dans les points différents O et B (fig. 9, *b*). Dans K, l'intervalle de temps Δt séparant les deux événements sera mesuré maintenant par deux horloges distantes de $V \cdot \Delta t$ le long de la direction du mouvement. Dans tous les systèmes de référence, la vitesse de la lumière est égale à c, c'est pourquoi, en divisant les longueurs des côtés latéraux du triangle OAB par la vitesse c, nous obtenons Δt sous forme implicite (fig. 9, *c*) :

$$\Delta t = 2\sqrt{z_0 + \left(\frac{V\Delta t}{2}\right)^2} \Big/ c.$$

En tirant Δt de cette équation, on a :

$$\Delta t = \frac{2z_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

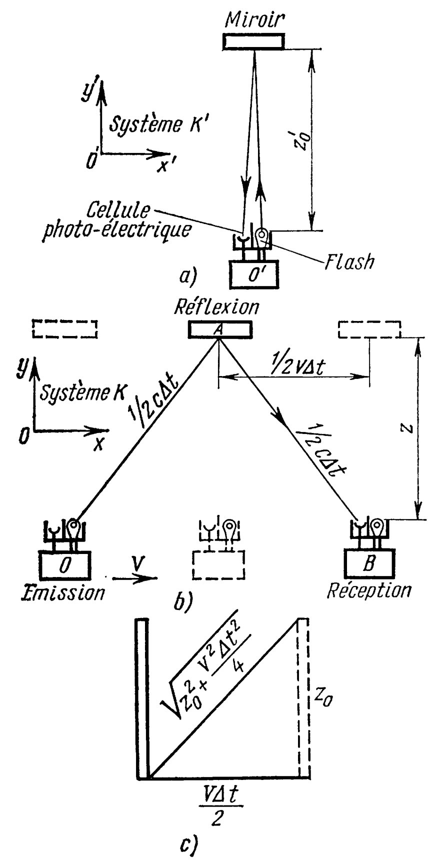


Fig. 9. Expérience idéalisée qui prouve que l'intervalle de temps propre entre deux événements est toujours inférieur à celui fixé par deux horloges de tout autre référentiel (expérience avec l'horloge « lumineuse »). *a*) Calcul de l'intervalle de temps propre entre les moments d'émission et de réception du signal lumineux à l'origine O' du système de coordonnées. *b*) Calcul de l'intervalle de temps entre les mêmes événements dans K, par rapport auquel se meuvent la source et le miroir. *c*) Calcul du trajet de la lumière dans le système de référence K.

Comme $z_0 = z_0'$, alors:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-B^2}}, \quad (2)$$

où $B = V/c$. Dans le système K', les deux événements ont eu lieu en un même point et, par conséquent, ont été mesurés par une même horloge. L'intervalle de temps qui sépare les événements mesuré par la même horloge (ce qui signifie que les événements ont eu lieu en un même point) est appelé *intervalle de temps propre* pour ces événements. Bien entendu, un intervalle de temps n'est plus propre si ses moments initial et final sont fixés dans les points différents et, par conséquent, à l'aide des horloges différentes. Dans le cas présent, l'intervalle de temps propre est $\Delta t'$. Il suit de la formule (2) que le temps $\Delta t'$ mesuré par l'observateur immobile dans K' est inférieur au temps Δt. On parle alors du ralentissement du temps; ce fait fera l'objet de l'étude ultérieure (voir page 66). Pour l'instant nous soulignons que le rythme du temps propre n'est défini que par la nature physique de l'horloge choisie, par exemple par la fréquence des oscillations de l'atome d'un élément quelconque ou bien par la demi-vie d'une substance radioactive dûment choisie.

c) La comparaison des longueurs des règles disposées parallèlement à la vitesse relative.

Supposons que, dans le système K^0, il y ait une règle au repos confondue avec l'axe des x_0. Désignons la longueur de la règle dans ce système par l_0 (longueur propre de la règle). En général, pour

déterminer la longueur de la règle par rapport à tout système de référence, il faut fixer simultanément dans ce système les coordonnées de l'origine et de la fin de la règle. Pour le système K^0 où la règle est au repos la simultanéité est bien évidente. Grâce au fait que dans la vie courante on mesure la longueur propre des objets, le processus de la mesure de la longueur est simple et consiste en application graduelle de l'échelle.

S'il s'agit des référentiels d'inertie qui se meuvent l'un par rapport à l'autre, la règle n'est au repos que dans un seul référentiel

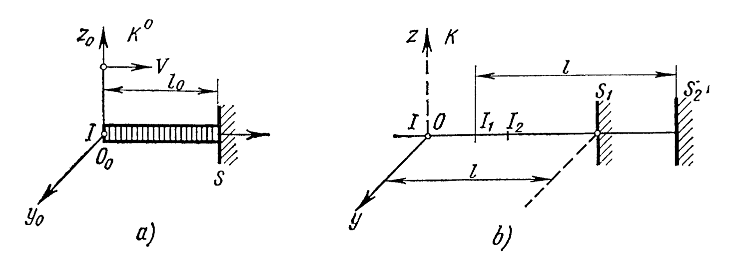


Fig. 10. Expérience idéalisée qui permet de découvrir la contraction de la règle si sa longueur est mesurée dans le référentiel, par rapport auquel la règle est en mouvement uniforme et rectiligne. La règle est parallèle à la vitesse de son propre mouvement. *a*) Mesure de la longueur de la règle qui est au repos en K' (longueur « propre » de la règle). *b*) Mesure de la longueur de la règle dans le référentiel, par rapport auquel elle se meut avec la vitesse V.

et se meut par rapport à tous les autres systèmes. L'application directe de l'échelle unitaire n'est plus possible. Utilisons alors le procédé valable aussi pour le calcul de la longueur d'une règle se mouvant par rapport au système de référence.

Admettons qu'une règle placée sur l'axe des x_0 soit au repos dans le système K^0. Posons l'extrémité gauche de la règle à l'origine de référence O_0 où se trouve aussi la source émettrice I. Sur l'extrémité droite de la règle est placé un miroir S perpendiculaire à l'axe des x_0 (et des x) (fig. 10, *a*). Envisageons deux événements. Le premier consiste en émission à l'instant $t = t_0 = 0$ par la source I d'un signal lumineux le long de l'axe des x_0 vers le miroir S. Le second événement est défini par ce que le signal lumineux, réfléchi sur le miroir S, revient à l'extrémité gauche de la règle, c.-à-d. au point O_0. Les deux événements sont observés en O_0 à l'aide d'une seule horloge. C'est pourquoi l'intervalle de temps entre eux est celui de temps propre Δt_0 qu'on peut évidemment mettre sous la forme

$$\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c} . \qquad (3)$$

Pour l'observateur dans le système K, ces deux événements se présentent autrement (fig. 10, *b*). A l'instant de l'émission du

signal, la source I du système K se trouve en O, tandis que le miroir S occupe la position S_1. Au moment de réflexion le miroir S se trouvera en S_2 et la source au point I_1. Au moment d'arrivée du signal, réfléchi sur le miroir S, à l'extrémité gauche de la barre, la source sera située au point I_2. Les moments de temps correspondant au premier et au second événement sont fixés, dans le système K, aux points différents et, par conséquent, par les horloges différentes. Ceci signifie que l'intervalle de temps Δt entre ces événements se détermine conformément à (2).

La longueur de la règle dans le système K (désignons-la par l) demeure inconnue mais toujours invariable, d'où $IS_1 = I_1S_2$. Le point S_1 se meut vers le point S_2 à la vitesse V du système de coordonnées, tandis que la lumière se propage, de I à S_1, à la vitesse c. Le temps que mettra la lumière pour couvrir la distance IS_2 est égal à IS_2/c. Pendant ce temps, le miroir S parcourra la distance $V(IS_2/c)$. Par conséquent,

$$IS_2 = l + V\,\frac{IS_2}{c}\,,$$

d'où

$$IS_2 = \frac{l}{1-\mathrm{B}} \quad \left(\mathrm{B} = \frac{V}{c}\right).$$

Pour le trajet de retour

$$I_2S_2 = l - V\,\frac{I_2S_2}{c}\,,$$

d'où

$$I_2S_2 = \frac{l}{1+\mathrm{B}}\,.$$

Donc, l'intervalle de temps entre les événements considérés dans K est égal à

$$\Delta t = \frac{IS_2 + I_2S_2}{c} = \frac{2l}{c\,(1-\mathrm{B}^2)}\,.$$

Or,

$$\Delta t_0 = \sqrt{1-\mathrm{B}^2}\cdot\Delta t,$$

Δt_0 étant défini par (3). C'est pourquoi nous obtenons immédiatement

$$l = \frac{\Delta t\cdot c\cdot(1-\mathrm{B}^2)}{2} = \frac{c\cdot\Delta t_0}{2}\sqrt{1-\mathrm{B}^2} = l_0\sqrt{1-\mathrm{B}^2}. \qquad (4)$$

La formule (4) traduit la variation de la longueur de la règle quand on passe du référentiel propre à tout autre référentiel d'inertie. Elle définit la « contraction de Lorentz ». La formule (4) n'est pas symétrique par rapport aux longueurs l et l_0, car elle établit la relation entre la longueur propre l_0 de la règle (dans le système K^0) et la

longueur l dans tout autre système K. Ce résultat est étudié d'une façon plus détaillée au paragraphe 16.

Soulignons une fois de plus que toutes les expériences idéalisées envisagées ont pour base deux postulats d'Einstein et se rapportent donc à la Relativité restreinte.

12. Formules de Lorentz. Il nous faut trouver les formules qui permettraient, d'après les coordonnées (x, y, z, t) d'un événement, par rapport au système K, de déterminer les coordonnées (x', y', z', t') du même événement dans le système K'. Ces transformations doivent satisfaire aux postulats d'Einstein.

Il découle de l'homogénéité de l'espace et du temps dans tous les référentiels d'inertie que la relation entre les coordonnées de l'événement dans les systèmes K et K' est linéaire. En effet, ce n'est que sous ces conditions que la transposition de l'origine des espaces et du temps dans K ($\bar{x} = x + x_0$, $\bar{y} = y + y_0$, $\bar{z} = z + z_0$, $\bar{t} = t + t_0$) amène le changement, commun à tous les points, de l'origine des espaces et du temps dans le système K'.

Nous utilisons la disposition usuelle des systèmes de référence (voir fig. 1) : la vitesse relative de K et K' est dirigée le long de l'axe commun des x, x' ; les axes des y et z sont parallèles aux axes des y' et z' respectivement. Au moment $t = t' = 0$, ces axes sont confondus. La vitesse de K' par rapport à K est égale à V. L'axe des x est l'intersection des plans $y = 0$, $z = 0$; si les axes des x et x' coïncident, alors la condition $y = 0$, $z = 0$ a pour conséquence $y' = 0$ et $z' = 0$. Ainsi, les formules de transformation pour y et z doivent avoir la forme suivante :

$$y' = \alpha z + \beta y, \quad z' = \gamma y + \delta z,$$

où α, β, γ, δ sont des constantes. Comme les rotations spatiales pures des axes de coordonnées ne sont pas essentielles pour la description des phénomènes physiques, on peut les éliminer et exiger, comme nous l'avons fait d'ailleurs, que le plan $y = 0$ se transforme en plan $y' = 0$ et le plan $z = 0$ en plan $z' = 0$. Ainsi donc, on peut poser $y' = \beta y$, $z' = \delta z$; toutefois, en vertu de l'équivalence des directions y et z (l'espace est isotrope et la vitesse relative des référentiels suit l'axe des x, x'), il faut admettre que $\beta = \delta$. Donc,

$$y' = \beta y, \quad z' = \beta z.$$

Envisageons dans K une règle de mesure unité sur l'axe des y (les coordonnées de ses extrémités sont égales à $y_1 = 0$, $y_2 = 1$). En K' on aurait $y'_1 = 0$, $y'_2 = \beta$ et la longueur $l' = y'_2 - y'_1 = \beta$. Si la règle de mesure unité est considérée en K' sur l'axe des y' ($y'_1 = 0$, $y'_2 = 1$), nous aurions trouvé que les coordonnées de ses extrémités sont, par rapport à K, égales à $y_1 = 0$, $y_2 = 1/\beta$ et la longueur à $l = y_2 - y_1 = 1/\beta$.

Ainsi, la longueur, dans le système K, d'une règle de mesure unité par rapport au système K' sera égale à β, tandis que celle, dans le système K', d'une règle de mesure unité par rapport au système K sera égale à $1/\beta$. Etant donné l'équivalence de tous les référentiels d'inertie, un tel résultat n'est pas admissible et il faut donc poser $\beta = 1$. Alors,

$$y = y', \quad z = z',$$

ce qui découle directement des postulats d'Einstein (voir le paragraphe 11).

Recherchons maintenant les formules de transformation pour x et t. Le point $x' = 0$ (point O') se meut le long de l'axe des x à la vitesse V et l'équation $x' = 0$ est équivalente à l'équation $x = Vt$. De façon analogue, l'équation $x = 0$ est équivalente à $x' = -Vt'$. Par conséquent,

$$x' = \Gamma' (x - Vt), \tag{5}$$

$$x = \Gamma (x' + Vt'). \tag{6}$$

Les facteurs Γ' et Γ sont déterminés ci-dessous et ils ne dépendent que de la valeur absolue de la vitesse V.

Il est facile de s'assurer que $\Gamma = \Gamma'$. En effet, soit l_0 la longueur propre de l'échelle dans K. Mettons l'une de ses extrémités à l'origine de K. Alors, les coordonnées de ses extrémités seront respectivement $x_1 = 0$, $x_2 = l_0$. A l'instant $t = t' = 0$ (rappelons qu'à cet instant K et K' coïncident géométriquement) $x'_1 = 0$, $x'_2 = l_0/\Gamma$ conformément à (6). Donc, la longueur de l'échelle, relativement à K', est égale à $l' = x'_2 - x'_1 = l_0/\Gamma$. Prenons l'échelle de la même longueur qui est immobile dans le système K'. Alors les coordonnées de ses extrémités seront égales à $x'_1 = 0$, $x'_2 = l_0$. A l'instant $t = 0$, les coordonnées de ses extrémités, relativement au système K, seront déjà égales à $x_1 = 0$ et $x_2 = l_0/\Gamma'$ conformément à (5). Par conséquent, sa longueur est égale à $l = x_2 - x_1 = l_0/\Gamma'$, c.-à-d. qu'elle s'est donc contractée de Γ' fois. Mais les deux systèmes K et K' sont équivalents; leur vitesse relative étant la même, il en est de même de la contraction et $\Gamma = \Gamma'$. Le sens des raisonnements qui ont abouti à ce résultat est simple: la contraction de Lorentz des échelles est la même pour tous les référentiels d'inertie.

Maintenant trouvons la valeur de Γ. Comme les systèmes K et K' sont en mouvement relatif, Γ ne peut dépendre que de la valeur absolue de V. Utilisons le postulat sur la constance de la vitesse de la lumière dans le vide dans tous les référentiels d'inertie. A l'instant $t = t' = 0$ (lorsque les origines O et O' des deux systèmes coïncident), on émet le signal lumineux à partir de l'origine commune. Supposons qu'un événement consiste en arrivée d'un signal à un certain moment (t pour le système K et t' pour le système K')

en un certain point (x pour K et x' pour K') sur l'axe des x. Dans le systeme K, ce point a pour coordonnée $x = ct$; dans K', le même point possède la coordonnée $x' = ct'$. Ces temps et ces coordonnées sont liés entre eux par les transformations (5) et (6). Substituant ces expressions à x et x' dans (5) et (6), nous obtenons

$$ct' = \Gamma t\,(c - V),$$
$$ct = \Gamma t'\,(c + V).$$

En multipliant membre à membre ces deux relations et en simplifiant par tt', nous aurons

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{B}^2}}, \quad \mathrm{B} = \frac{V}{c}. \tag{7}$$

Pour avoir la formule de transformation du temps, tirons t' de (6), compte tenu de (5):

$$t' = \frac{x}{\Gamma V} - \frac{x'}{V} = \frac{x}{\Gamma V} - \frac{\Gamma\,(x - Vt)}{V} = \Gamma\left\{t + \frac{x}{V}\left(\frac{1}{\Gamma^2} - 1\right)\right\} = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}\,x\right).$$

Donc, nous arrivons à la transformation des coordonnées et du temps sous la forme

$$x' = \Gamma\,(x - Vt), \quad y' = y, \; z' = z, \quad t' = \Gamma\left(t - \frac{\mathrm{B}}{c}\,x\right). \tag{8}$$

La transformation (8) n'est autre que la transformation de Lorentz. On peut la déduire également pour une direction arbitraire de la vitesse relative $\boldsymbol{V}$ de K et K'. En effet, nous avons obtenu la variation des coordonnées dans le sens du mouvement et leur invariance dans le sens perpendiculaire au mouvement. Décomposons le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ d'un point en deux composantes: l'une $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ ($\boldsymbol{r}_{\parallel} \parallel \boldsymbol{V}$) parallèle à la direction du mouvement et l'autre $\boldsymbol{r}_{\perp}$ ($\boldsymbol{r}_{\perp} \perp \boldsymbol{V}$) perpendiculaire à cette direction:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\perp} + \boldsymbol{r}_{\parallel}.$$

Alors, il est évident que

$$\boldsymbol{r}'_{\parallel} = \Gamma\,(\boldsymbol{r}_{\parallel} - \boldsymbol{V}\cdot t) = \boldsymbol{r}_{\parallel} + (\Gamma - 1)\,\boldsymbol{r}_{\parallel} - \Gamma \boldsymbol{V} t,$$
$$\boldsymbol{r}'_{\perp} = \boldsymbol{r}_{\perp},$$
$$t' = \Gamma\left(t - \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{V}}{c^2}\right).$$

En ce qui concerne $\boldsymbol{r}_{\parallel}$, celui-ci se définit par multiplication du vecteur unitaire $\boldsymbol{V}/V$ qui suit le mouvement par la projection de $\boldsymbol{r}$ sur cette direction, égale à $\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{V}/V)$:

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} = \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{V})}{V^2}\,\boldsymbol{V}.$$

C'est pourquoi

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_{\perp} + \boldsymbol{r}'_{\parallel} = \boldsymbol{r}_{\perp} + \boldsymbol{r}_{\parallel} + (\Gamma - 1)\,\boldsymbol{r}_{\parallel} - \Gamma \boldsymbol{V} t = \boldsymbol{r} + (\Gamma - 1)\,\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{V}}{V^2}\,\boldsymbol{V} - \Gamma \boldsymbol{V} t,$$
$$t' = \Gamma\left(t - \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{V}}{c^2}\right).$$

Cette équation représente la transformation de Lorentz sous forme vectorielle pour une direction arbitraire de la vitesse relative; elle se ramène à la formule classique (1,2) quand $\Gamma \to 1$.

Comme nous devons obtenir la même transformation par une autre voie, il semble plus raisonnable de remettre sa discussion à plus tard. Cette voie nous amènera aux nouveaux concepts du monde physique réel qui est représenté par le continuum quadridimensionnel espace-temps et dans lequel se déroulent tous les phénomènes de la nature. La Relativité restreinte est donc la théorie de l'espace-temps quadridimensionnel qui a une directe signification géométrique. Par son contenu physique et par la possibilité d'une généralisation ultérieure, ce procédé s'est montré extrêmement important pour toute notre conception physique du monde et fut le premier pas vers la création de la théorie de la gravitation.

13. Condition générale pour les transformations des coordonnées et du temps. Envisageons une autre expérience idéalisée. Soient deux systèmes d'inertie K et K' dans le vide (K' se meut suivant l'axe commun des x, x' avec la vitesse V). Depuis l'origine de référence commune envoyons un signal lumineux à l'instant initial $t = t' = 0$ où les deux origines O et O' coïncident par hypothèse. Selon le deuxième postulat d'Einstein, la lumière se propage dans toutes les directions dans K et K' avec la même vitesse c. Il en découle que le front d'ondes (surface des phases égales) représente des sphères pour les deux systèmes K et K'. On en tire immédiatement les équations de ces sphères :

Système K	Système K'
$x^2+y^2+z^2=c^2t^2,$	$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2.$

Voici les raisonnements qui nous ont amené à mettre t' au lieu de t dans le deuxième membre du système K'. Supposons que le temps dans les deux systèmes K et K' soit le même ($t = t'$). Dans ce cas, les rayons des sphères seraient égaux (pour le moment donné t). Il s'ensuit que le même objet physique, le front d'ondes dans le cas présent, serait décrit indifféremment par deux sphères de même rayon mais avec les centres en O et O'. Cela est absurde. Donc, l'hypothèse $t = t'$ est fausse. Mettons les deux formules sous la forme suivante :

$$c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)=0,$$
$$c^2t'^2-(x'^2+y'^2+z'^2)=0.$$

Dans cette expérience idéalisée, il s'agit en fait de deux événements. Le premier consiste en émission du signal au moment $t_0=0$ à partir de l'origine du système de référence $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ et le deuxième en arrivée de ce signal en un point arbitraire de la

sphère muni des coordonnées x, y, z au moment t. Si l'on compose l'expression suivante

$$\sqrt{c^2 (t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2-(z-z_0)^2}=\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2-z^2}$$

dite *intervalle entre* ces deux *événements* et désignée par s, le résultat obtenu peut être formulé de la façon suivante : pour deux événements qui consistent en émission depuis un point d'un signal lumineux et en arrivée de celui-ci en un autre point, le carré de l'intervalle entre ces événements dans tout référentiel doit être égal à zéro :

$$s^2=0, \quad s'^2=0. \tag{9}$$

Il est évident que l'intervalle entre les événements peut être défini non seulement pour l'émission et la réception du rayon lumineux. Soient x_1, y_1, z_1, t_1 les nombres définissant les coordonnées de l'événement 1 et x_2, y_2, z_2, t_2 ceux de l'événement 2 ; par définition, l'intervalle entre ces événements est égal à :

$$s_{12}=\sqrt{c^2 (t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}\ ;$$

s_{12} n'étant pas nul seulement pour les événements arbitraires.

Il est souvent plus commode de considérer les événements séparés par des espaces et des intervalles de temps infiniment petits. Posant dans ce cas $t_2 - t_1 = dt$, $x_2 - x_1 = dx$, $y_2 - y_1 = dy$, $z_2 - z_1 = dz$, nous obtenons pour le carré de l'intervalle :

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

De l'expérience idéalisée d'émission-réception du signal lumineux, il vient, conformément à (9), que si pour un système d'inertie $ds^2 = 0$, alors pour tout autre système $ds'^2 = 0$. Les quantités ds et ds' sont des infiniment petits de même ordre et sont donc proportionnelles l'une à l'autre. Par conséquent,

$$ds^2=a\,ds'^2,$$

où a est le coefficient de proportionnalité. Cette relation doit être vérifiée pour l'intervalle séparant tout couple d'événements. En effet, nous n'avons imposé aucune condition à la relation entre les intervalles ds et ds' pour un couple d'événements arbitraires. Mais pour les événements du type particulier comme émission-réception du signal lumineux, cette relation doit être exactement comme ci-dessus.

Le coefficient a ne peut dépendre des coordonnées x, y, z et du temps t, car cela impliquerait la non-équivalence des points d'espace et des moments du temps. Or, l'espace et le temps étant homogènes, le facteur a doit avoir une valeur constante qui ne dépend que de la valeur absolue de la vitesse relative de deux référentiels considérés. En effet, le facteur a est également indépendant de la direction de la

vitesse relative de deux référentiels d'inertie, ce qui supposerait la non-équivalence des différentes directions dans l'espace. En vertu de l'isotropie de l'espace, nous devons admettre que a ne peut dépendre que de la valeur absolue de la vitesse relative de deux référentiels d'inertie.

Soient à présent trois référentiels d'inertie K, K', K''. $\boldsymbol{V}_1$ est la vitesse de K' par rapport à K et $\boldsymbol{V}_2$ la vitesse de K'' par rapport à K. Nous pouvons écrire

$$ds^2 = a(V_1)\, ds_1^2, \tag{*}$$

$$ds^2 = a(V_2)\, ds_2^2. \tag{**}$$

En considérant les systèmes K' et K'', on aura

$$ds_1^2 = a(V_{12})\, ds_2^2,$$

où V_{12} est la valeur absolue de la vitesse du système K' par rapport à K''. Portant la dernière expression dans (*) et comparant avec (**), nous trouvons que

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \tag{***}$$

Comme V_{12} dépend non seulement des valeurs absolues des vecteurs $\boldsymbol{V}_1$ et $\boldsymbol{V}_2$, mais aussi de l'angle entre eux (cet angle n'entre point dans la dernière relation), alors la relation (***) ne peut être satisfaite que dans le cas où le facteur a se ramène à une constante; celle-ci, comme il est évident de la dernière relation, ne peut être égale qu'à 1. C'est pourquoi

$$ds^2 = ds'^2;$$

de l'égalité des intervalles infiniment petits découle celle des intervalles finis:

$$s = s',$$

c.-à-d. l'invariance de l'intervalle s par rapport à la transformation de Lorentz.

Ainsi donc, l'expression $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ doit se conserver quand on passe de K à K' (pour le signal lumineux $s_{12} = s'_{12} = 0$). Lorsque les systèmes K et K' sont disposés comme sur la figure 1, $y = y'$, $z = z'$ et la somme $y^2 + z^2$ est un invariant. Alors $s^2 = c^2t^2 - x^2$, et c'est justement cette expression qui est un invariant de la transformation de Lorentz. $c^2t^2 - x^2 = \text{Inv}$ est précisément la condition à laquelle doivent satisfaire les transformations des coordonnées et du temps compatibles avec les postulats d'Einstein. Mais cette condition entraîne une nouvelle géométrie de l'espace physique. Essayons d'en expliquer la signification.

En parlant de l'espace tridimensionnel habituel et des coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point, on souligne l'indépendance de ces

coordonnées. Toutefois, les coordonnées demeurent indépendantes tant que la distance des points dans cet espace n'est pas définie. D'après sa signification même, la distance des points est un invariant par rapport à la transformation des coordonnées. Le caractère d'un espace découle de la définition de la distance entre les points. Dans notre espace tridimensionnel, elle est définie par le théorème de Pythagore :

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ ;$$

l'espace de ce type est appelé *espace tridimensionnel euclidien*. Dans cet espace, la distance entre l'origine de référence et un point quelconque est définie par l'expression

$$x^2 + y^2 + z^2$$

qui est un invariant de la transformation des coordonnées.

En partant des postulats d'Einstein nous sommes venus à la conclusion que dans le « monde » des phénomènes physiques doit exister une relation invariante entre trois coordonnées et le temps de la forme :

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = s^2.$$

Cette relation représente les quatre variables x, y, z et t comme un certain ensemble uni. Le monde des phénomènes physiques n'est pas si élémentaire pour être décrit par quatre coordonnées indépendantes. On déduit des postulats d'Einstein que dans le monde physique réel il existe une relation entre les coordonnées cartésiennes et le temps exprimée par s^2. Nous habitons un monde décrit par quatre variables x, y, z, t reliées entre elles.

Pourtant il n'est guère raisonnable d'envisager le passage de l'espace géométrique tridimensionnel, auquel nous sommes habitués, à celui quadridimensionnel de la Relativité restreinte par analogie avec le passage de la géométrie plane à la géométrie dans l'espace. L'essentiel est que le résultat acquis signifie non seulement l'apparition de la quatrième coordonnée, celle de temps, mais aussi la modification de la géométrie du continuum espace-temps par rapport à notre géométrie tridimensionnelle quotidienne.

Voici quelques réflexions basées sur l'analogie géométrique. En géométrie classique, dans le plan et dans l'espace, la forme quadratique invariante du type $x^2 + y^2$ ou $x^2 + y^2 + z^2$ définit la distance entre le point de coordonnées x, y ou x, y, z et l'origine des coordonnées. Le nombre de coordonnées faisant partie de cette forme nous montre le type d'un espace qui pourrait être bi ou tridimensionnel.

Nous habitons l'espace tridimensionnel pour lequel la géométrie d'Euclide est valable à un haut degré de précision. Nous nous représentons nettement ce que signifie la transition des figures planes à celles d'espace, c.-à-d. le passage du plan à l'espace. Il est sensible-

ment plus difficile de se faire une idée de la transition de l'espace tridimensionnel à celui quadridimensionnel. Procédant par analogie admettons que, dans le monde d'Euclide quadridimensionnel, la distance entre le point et l'origine des coordonnées s'exprime sous la forme $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$, où u est la quatrième coordonnée. En principe, une telle transition correspondrait au passage du plan à l'espace tridimensionnel.

Mais le continuum espace-temps défini par quatre coordonnées x, y, z, t s'avère plus compliqué. L'invariant de cet espace apparaît sous la forme $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Comparons deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \tag{I}$$

et

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{II}$$

Il est évident qu'elles se distinguent essentiellement par l'ensemble des signes devant les carrés des variables (cet ensemble des signes est appelé *signature*). Relevons ces signatures: $(+ + + +)$ (I), $(+ - - -)$ (II).

Ainsi, l'espace quadridimensionnel obtenu par un simple accroissement du nombre de dimensions par rapport à notre espace habituel aurait pour signature $(+ + + +)$. Cet espace ne différerait du nôtre qu'en un nombre de dimensions et pourrait être aussi appelé espace euclidien (quadridimensionnel). La signature de l'espace envisagé dans la Relativité restreinte est $(+ - - -)$.

Cette modification de trois signes dans l'invariant, si insignifiante de prime abord, est d'une importance capitale. Car, dans la géométrie, d'après le sens même de cette science, la distance des deux points est l'invariant de la transformation des coordonnées. Il en résulte que l'invariant, obtenu à la suite des raisonnements physiques, doit définir la distance entre les points dans l'espace en question. Cet espace n'est autre qu'un espace physique réel où ont lieu tous les phénomènes physiques.

Mais la modification concernant la définition de la distance n'est pas sans conséquence. Elle change radicalement la géométrie de l'espace qui diffère déjà de celui d'Euclide. L'espace où la distance entre les points est définie par l'invariant s^2 est appelé *espace pseudo-euclidien*. En particulier, dans cet espace, le théorème de Pythagore n'est plus valide et cède la place au théorème *pseudo-pythagorien*. La cause physique de l'apparition du continuum espace-temps pseudo-euclidien consiste en ce que le temps et les coordonnées, bien que liés entre eux, ne sont point équivalents.

Ainsi donc, l'espace de quatre variables x, y, z, t de la Relativité restreinte est un espace pseudo-euclidien quadridimensionnel. Cet espace n'est pas un simple résultat d'addition de la quatrième coordonnée de temps t aux coordonnées d'espace x, y, z. Pour souligner ce fait, on parle souvent de l'espace quadridimensionnel «fictif».

L'introduction de la distance sous la forme $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ fait naître une géométrie spéciale. Celle-ci peut être construite et elle est à la base de la Relativité restreinte. C'est à Minkowski que revient l'interprétation géométrique des résultats d'Einstein. Les phénomènes physiques ont lieu dans le continuum espace-temps quadridimensionnel (« univers », d'après la terminologie de Minkowski). La Théorie de la relativité mit à jour la nature géométrique de l'« univers » et peut être entièrement interprétée en termes géométriques.

Afin de rendre plus aisée l'interprétation d'une telle géométrie, on se sert d'un procédé formel qui consiste en introduction d'une coordonnée imaginaire $\tau = ict$. Soulignons, toutefois, qu'il ne s'agit ici que d'un procédé commode et qu'il est possible de s'en passer; c'est pourquoi il ne faut pas chercher du mysticisme dans l'introduction de l'unité imaginaire. Sous leur forme définitive les formules des coordonnées et du temps ne la contiennent pas, ce qui montre qu'elle ne joue qu'un rôle auxiliaire. Le procédé ci-dessus simplifie les opérations en permettant d'éviter l'introduction des composantes co et contravariantes des quadrivecteurs.

Introduisons donc, pour la commodité, la coordonnée imaginaire $\tau = ict$. Alors

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 = -(x^2 + \tau^2) \quad (i^2 = -1).$$

14. Encore une déduction de la transformation de Lorentz. Soit un plan de variables (x, τ), dans lequel l'expression $x^2 + \tau^2$ est une distance de l'origine jusqu'à un point (x, τ). Cette distance n'est pas modifiée lorsqu'on imprime au système de coordonnées la rotation d'un angle ϑ dans le plan (x, τ).

La rotation d'angle ϑ dans le plan euclidien ordinaire est décrite par les formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos\vartheta + y \sin\vartheta, \\ y' &= -x \sin\vartheta + y \cos\vartheta, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

où toutes les quantités sont réelles.

Considérons une rotation dans le plan (x, τ) où l'une des coordonnées est une quantité imaginaire. Supposons que les formules (10) soient toujours de la même forme. Nous allons voir que la signification géométrique des formules avec une variable imaginaire sera modifiée par rapport à celle des formules (10). Ecrivons la transformation recherchée sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos\vartheta + \tau \sin\vartheta, \\ \tau' &= \tau \cos\vartheta - x \sin\vartheta. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Quelle est la signification de l'angle ϑ? Il est clair que ce dernier est lié à la vitesse V du mouvement de K' par rapport à K, car les systèmes ne se distinguent que par cette vitesse. L'origine O' se meut

avec la vitesse V par rapport à K ; sa coordonnée x dans le système K est égale à Vt; pour $x' = 0$ nous avons donc d'une part,

$$x = Vt = \frac{V}{ic}\tau = -i\frac{V}{c}\tau = -i\mathrm{B}\tau \quad \left(\mathrm{B} = \frac{V}{c}\right). \tag{12}$$

D'autre part, posant $x' = 0$ dans la première formule de (11), nous obtenons pour ce point dans le système K:

$$x = -\mathrm{tg}\,\vartheta \cdot \tau. \tag{13}$$

En égalant (12) et (13), on a:

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = i\mathrm{B}. \tag{14}$$

La tangente est imaginaire, ce qui nous rappelle une fois de plus l'existence de la variable imaginaire et de l'espace pseudo-euclidien.

On tire $\sin\vartheta$ et $\cos\vartheta$ de (14) en se servant des formules trigonométriques connues:

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta &= \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{B}^2}} = \Gamma, \\ \sin\vartheta &= \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\vartheta}} = \frac{i\mathrm{B}}{\sqrt{1-\mathrm{B}^2}} = i\mathrm{B}\Gamma, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

où Γ est une désignation déjà introduite (7):

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{B}^2}}.$$

En portant $\cos\vartheta$ et $\sin\vartheta$ dans (11), on trouve les transformations recherchées pour les variables x, τ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \Gamma\,(x + i\mathrm{B}\tau), \\ \tau' &= \Gamma\,(\tau - i\mathrm{B}x). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Etant donné que les systèmes K et K' sont équivalents et n diffèrent que par le signe de la vitesse relative V, les formules de la transformation des coordonnées d'un événement de K à K' s'obe tiennent de celles du passage de K' à K pour un même événement en remplaçant les quantités primées par les quantités sans indice et vice versa, compte tenu de l'inversion du signe de la vitesse V. Après une telle opération avec les expressions (16) on obtient:

$$\left.\begin{aligned} x &= \Gamma\,(x' - i\mathrm{B}\tau), \\ \tau &= \Gamma\,(\tau' + i\mathrm{B}x'). \end{aligned}\right\} \tag{16'}$$

Le même résultat découle de la résolution directe de (16) par rapport à x et τ.

On passe aisément aux variables réelles x, t dans les formules (16) et (16'). Pour ce faire, substituons $\tau = ict$ et $\tau' = ict'$. On aura immédiatement les formules de transformation (8). Les transforma-

tions directe et inverse des variables sont de la forme :

$$\left.\begin{aligned} x' &= \Gamma(x - Vt), & x &= \Gamma(x' + Vt'), \\ t' &= \Gamma\left(t - \frac{\mathrm{B}}{c}x\right), & t &= \Gamma\left(t' + \frac{\mathrm{B}}{c}x'\right). \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Récrivons ces formules sous une autre forme qui est parfois commode, où le deuxième membre contient des variables mixtes :

$$x' = -Vt' + \frac{x}{\Gamma}, \qquad t' = -\frac{V}{c^2}x' + \frac{t}{\Gamma}. \qquad (18)$$

Pourquoi les formules (8) sont-elles appelées transformation *de Lorentz*? Quelle signification nouvelle fut-elle apportée par Einstein dans leur interprétation? Le nom de ces transformations (8) est dû à Lorentz qui les a déduites en 1904, c.-à-d. avant qu'elles soient obtenues par Einstein. Lorentz démontra que les équations de Maxwell étaient covariantes par rapport à la transformation (8). Mais cela n'était pas encore la transformation de l'espace et du temps de la Relativité restreinte. L'introduction par Lorentz du temps « local » t' fut purement formelle. Toute la théorie de Lorentz avait trait aux hypothèses sur la structure de la matière. Einstein résolvait le problème de l'électrodynamique des milieux mouvants en partant d'autres conceptions de relativité. Selon lui, les données expérimentales se prononcent pour la généralisation des principes de relativité sur l'électrodynamique. Il n'eut besoin d'aucune hypothèse sur la structure de la matière. Einstein vit que la généralisation du principe de relativité exigeait la révision des notions d'espace et de temps. Il fut le premier à comprendre que t' n'était pas le temps « local » fictif mais le temps mesuré dans le système de référence K'.

Avant d'aborder l'interprétation de la transformation de Lorentz soulignons que pour sa déduction il suffit de supposer que l'intervalle soit invariant et que la transformation elle-même soit linéaire. La condition de linéarité découle de l'équivalence de tous les points d'espace et de tous les moments de temps (homogénéité de l'espace et du temps). Il suit du principe de relativité que si $x = f(x', t', V)$, alors $x' = f(x, t, -V)$, où f est la même fonction. Cela permet d'écrire immédiatement (5) et (6) en considérant Γ comme fonction paire de la vitesse. En élevant au carré (5) et (6) et en faisant la soustraction membre à membre, nous obtenons :

$$x'^2 - x^2 = \Gamma^2 \{(x^2 - x'^2) - 2V(xt + x't') + V^2(t^2 - t'^2)\}.$$

Multipliant (5) par x' et (6) par x et soustrayant, on aboutit à la relation suivante :

$$x'^2 - x^2 = -V\Gamma(x't + t'x).$$

Finalement, multipliant (5) par t et (6) par t' et additionnant, on a :

$$x't + t'x = \Gamma\{xt + x't' + V(t'^2 - t^2)\}.$$

En combinant ces trois dernières relations, on obtient:

$$x'^2 - x^2 = \frac{V^2(t^2 - t'^2)}{1 - \frac{1}{\Gamma^2}}.$$

Pour que la condition de l'invariance de l'intervalle $x^2 - c^2t^2 = \text{Inv}$ soit respectée, il faut que soit vérifiée la condition

$$\frac{V^2}{1 - \frac{1}{\Gamma^2}} = c^2.$$

On en tire pour Γ la valeur (7) et on est ramené à la transformation de Lorentz (17).

Analysons plus attentivement les formules (17). Avec $B > 1$, Γ devient imaginaire et la transformation est dépourvue de tout sens mathématique. Cette condition est équivalente à la condition $V > c$, c.-à-d. que la vitesse relative des référentiels ne peut dépasser la vitesse de la lumière dans le vide et même s'approcher de cette dernière. Ce résultat est en parfait accord avec la Relativité restreinte. Le système de référence est un système des corps matériels. Le corps en mouvement peut transporter le signal, c'est pourquoi sa vitesse ne peut dépasser c (et même ne peut s'approcher de cette dernière, comme nous allons voir au chapitre IV).

Si les vitesses relatives du système sont petites, c.-à-d. si $B \ll 1$ ($V \ll c$), les formules (17) deviennent celles de la transformation de Galilée. Donc, la transformation classique de Galilée est valable dans le cas des mouvements relatifs dont les vitesses sont petites devant celle de la lumière. Il est parfois commode de remplacer, dans la transformation de Lorentz, la variable t par la variable $u = ct$; cette transformation acquiert alors la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \Gamma(x - Bu), & x &= \Gamma(x' + Bu'), \\ u' &= \Gamma(u - Bx), & u &= \Gamma(u' + Bx'). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Donnons une autre écriture de la transformation de Lorentz. Rappelons-nous la définition des fonctions hyperboliques au moyen des fonctions trigonométriques d'argument imaginaire:

$$\cos i\varphi = \text{ch}\,\varphi, \quad \sin i\varphi = i\,\text{sh}\,\varphi, \quad \text{tg}\,i\varphi = i\,\text{th}\,\varphi. \tag{20}$$

Ces formules découlent directement des définitions du sinus et du cosinus pour des nombres complexes:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

En comparant la dernière formule de (20) avec (14) on voit qu'il est possible de poser $\vartheta = i\varphi$ et $B = \text{th}\,\varphi$. Alors de (11) il résulte immédiatement que:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\,\text{ch}\,\varphi - ct\,\text{sh}\,\varphi, \\ ct' &= -x\,\text{sh}\,\varphi + ct\,\text{ch}\,\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Il vient qu'il faut poser ch $\varphi = \Gamma$, sh $\varphi = \Gamma B$. Ainsi, dans le plan des variables réelles x, t, on a formellement affaire à la rotation du système de coordonnées cartésiennes d'un angle imaginaire: les formules (21) qui la définissent n'ont qu'une fausse ressemblance avec les formules (10) traduisant une vraie rotation. L'interprétation géométrique de la transformation de Lorentz et de ses conséquences est donnée dans le chapitre VIII [il s'agit de la « rotation » des axes x, τ d'après les formules (11), (17), (19) ou (21)].

Le système des désignations symétriques facilite les opérations dans la Relativité restreinte : ce système est exposé dans le paragraphe 1 de l'Appendice.

Nous introduisons les désignations symétriques dans l'espace quadridimensionnel (pseudo-euclidien, fictif) de la Relativité restreinte en posant $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $\tau = x_4 = ict$. La transformation de Lorentz prend alors la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \Gamma x_1' + 0\cdot x_2' + 0\cdot x_3' - iB\Gamma x_4', \\ x_2 &= 0\cdot x_1' + 1\cdot x_2' + 0\cdot x_3' + 0\cdot x_4', \\ x_3 &= 0\cdot x_1' + 0\cdot x_2' + 1\cdot x_3' + 0\cdot x_4', \\ x_4 &= iB\Gamma\cdot x_1' + 0\cdot x_2' + 0\cdot x_3' + \Gamma\cdot x_4', \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

ou, sous forme condensée,

$$x_i = \alpha_{ik} x_k'. \tag{23}$$

Il s'agit ici de la sommation sur l'indice k de 1 à 4, l'indice i étant libre et prenant toutes les valeurs de 1 à 4. Ne pas confondre l'indice i avec l'unité imaginaire!

Les coefficients α_{ik} forment la matrice

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \tag{24}$$

qui est appelée *matrice de la transformation de Lorentz.* Pour transformer les coordonnées et le temps lors du passage d'un référentiel d'inertie à tout autre référentiel on utilise généralement les matrices de cette forme. Elles ne se distinguent que par les valeurs de la vitesse relative V, donc par celles de $B = V/c$.

Les formules de la transformation inverse (lorsqu'on passe de K à K') s'obtiennent en remplaçant B par —B. Désignons par α_{ik}' la matrice de transition de K à K' de façon que

$$x_i' = \alpha_{ik}' x_k.$$

Or, la substitution de —B à B entraîne la transformation de la matrice α_{ik} en α_{ki} (les lignes et les colonnes changent de places), d'où

$$x_i' = \alpha_{ki} x_k. \tag{25}$$

Citons ci-dessous à titre de référence quelques formules de transformation des 4-vecteurs et des tenseurs d'ordre deux dans l'espace quadridimensionnel. Pour plus de détail, le lecteur est renvoyé à l'Appendice, paragraphe 3.

Les 4-vecteurs se transforment selon les formules de transformation des coordonnées; ainsi, pour tout 4-vecteur $\vec{A}$, dont les composantes dans le référentiel K sont égales à A_1, A_2, A_3, A_4, on obtient dans K' les composantes

$$A'_1 = \Gamma(A_1 + i\mathrm{B}A_4), \quad A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3, \quad A'_4 = \Gamma(A_4 - i\mathrm{B}A_1), \tag{26}$$

et inversement

$$A_1 = \Gamma(A'_1 - i\mathrm{B}A'_4), \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3, \quad A_4 = \Gamma(A'_4 + i\mathrm{B}A'_1). \tag{27}$$

Si dans le système K le tenseur d'ordre deux est défini par ses composantes T_{ik}, alors dans le système K' les composantes de ce tenseur seront de la forme

$$T'_{ik} = \alpha_{mi}\alpha_{lk}T_{ml}, \tag{28}$$

et inversement

$$T_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kl}T'_{ml}, \tag{29}$$

où α_{im} et α_{kl} sont les éléments de la matrice (24).

CHAPITRE III

CONSÉQUENCES DE LA TRANSFORMATION DE LORENTZ

15. Sur la mesure des longueurs et des intervalles de temps. La transformation de Lorentz permet de transformer les coordonnées d'un événement (souvent, pour les raisons de simplicité, le temps est inclus dans les coordonnées) lors du changement de référentiel. Or, un événement n'est qu'un élément d'un phénomène physique et le problème cardinal de la Relativité restreinte consiste en transformation des grandeurs physiques. Avant de poser ce problème, il faut analyser le procédé de mesure des grandeurs physiques fondamentales. Les mesures physiques fondamentales sont celles de distances (longueurs) et de temps. On est habitué à mesurer les distances des points ou les dimensions des corps lorsque ces derniers sont au repos relatif. Si le corps est au repos, il suffit de placer le long de ce corps une échelle unitaire autant de fois qu'il le faut. On agit de la sorte quand on mesure la longueur d'une étoffe ou celle d'une pièce.

Il est assez facile à mesurer l'intervalle de temps séparant deux événements qui ont lieu au point où se trouve une horloge. Pour ce faire, il suffit de fixer les moments où les deux événements ont eu lieu. La différence entre les indications de l'horloge nous fournira l'intervalle de temps entre deux événements. On établit ainsi, par exemple, la durée d'une conférence ou d'un match de football.

Mais comment s'y prendre pour mesurer la longueur d'un corps en mouvement relatif? Supposons qu'on veuille mesurer la longueur d'un train qui passe devant nous à une grande vitesse. Une tâche pareille n'est pas tellement facile pour un seul observateur. En effet, il doit simultanément fixer les positions de la tête et de la queue du train. Mais, une fois la position de la locomotive marquée, l'observateur se retourne et voit la queue s'avancer. Donc, la mesure simultanée des positions de la tête et de la queue du train exige un procédé spécial.

Et comment donc trouver l'intervalle de temps entre les événements ayant lieu aux points d'espace différents? Souvenons-nous du procédé dont on se sert pour mesurer le temps que met le sprinter pour parcourir la distance de 100 mètres. Les événements considérés y sont le départ et l'arrivée du coureur. Il n'y a qu'une seule horloge! Le signal de départ marque le début de la course et la mise en marche du chronomètre qui se trouve au point de l'arrivée. La

célérité du son dans l'air est de 330 m/s et, par suite, le sportif commencera sa course avant la mise en marche du chronomètre placé au point d'arrivée. Mais tout cela n'a pas d'importance, car la vitesse du coureur est très petite (36 km/h environ, ce qui n'est même pas comparable à la vitesse du son). Cependant, l'exemple montre que la détermination de l'intervalle de temps entre deux événements qui ont lieu aux différents points de l'espace est digne d'intérêt. Là, il ne s'agissait que d'une seule horloge. Dans l'esprit de la Relativité restreinte il faudrait en mettre deux, au départ et au finish. Mais pratiquement ce n'est pas nécessaire.

Chaque référentiel d'inertie possède son propre système de référence et tout point nécessaire est muni d'une horloge immobile. Ces horloges sont synchronisées dans ce repère, c.-à-d. qu'elles indiquent simultanément le même temps dans ce système. Soulignons, en anticipant, qu'une horloge synchronisée dans un référentiel d'inertie ne l'est plus pour l'observateur d'un autre référentiel.

Lors de la confrontation des événements dans les référentiels d'inertie K et K', nous heurtons des circonstances peu habituelles. Qu'est-ce que la transformation de Lorentz? Ce n'est qu'une simple transformation des coordonnées x, y, z, t de l'événement A qui a lieu dans le système K en coordonnées du même événement dans le système K'. Les formules (II, 8) nous donnent l'expression pour (x', y', z', t') au moyen de (x, y, z, t).

Il découle immédiatement de la transformation de Lorentz que deux événements simultanés dans le repère K ne le sont point dans K'. Ceci signifie que la simultanéité de deux événements s'avère relative; autrement dit, elle n'est possible qu'au sein d'un seul référentiel. En effet, envisageons deux événements simultanés dans le système K. Soient $(x_1, y_1, z_1, t_1 = t)$ et $(x_2, y_2, z_2, t_2 = t)$ leurs coordonnées. On détermine facilement, selon la transformation de Lorentz (II, 8), le temps du premier et du second événements dans le système K' :

$$t_1' = \Gamma\left(t_1 - \frac{\mathrm{B}}{c}\, x_1\right) = \Gamma\left(t - \frac{\mathrm{B}}{c}\, x_1\right),$$

$$t_2' = \Gamma\left(t_2 - \frac{\mathrm{B}}{c}\, x_2\right) = \Gamma\left(t - \frac{\mathrm{B}}{c}\, x_2\right).$$

En composant la différence

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \Gamma\, \frac{\mathrm{B}}{c}\,(x_1 - x_2) = \Gamma\, \frac{V}{c^2}\,(x_1 - x_2) = \frac{V}{c^2}\,(x_1' - x_2'),$$

nous trouvons que, bien que les événements dans le système K soient simultanés ($t_1 = t_2$), ils ne le sont plus ($t_1' \neq t_2'$) dans le système K', à l'exception du cas où ces événements ont eu lieu en un même point. Par conséquent, la simultanéité des événements n'est pas un fait absolu mais une circonstance particulière étroitement liée au choix du repère.

Si toutes les horloges du système K sont synchronisées, cela veut dire que, dans tous les points de ce repère munis d'horloges, leurs indications sont à tout moment identiques. Il est essentiel que nous consultons les horloges simultanément du point de vue de K. Envisageons, en tant qu'événements simultanés dans le référentiel K, les indications des horloges synchronisées situées en différents points de l'axe des x. Il est vrai que dans ce système leurs indications sont identiques. Mais les observateurs du système K' remarqueront pour chaque couple d'horloges une différence des indications qui est égale, selon la dernière formule, à $\Delta t' = V(x'_1 - x'_2)/c^2$. Par conséquent, si les observateurs du repère K' notent simultanément (par rapport à leur système) les indications des horloges du repère K, situées à cet instant en face d'eux et comparent leurs notes, ils découvriront une différence des indications qui va en croissant en valeur absolue avec l'accroissement de la distance entre les horloges dans le repère K. Le retard ou l'avance relatifs des horloges dépendent de leurs positions réciproques. Ce problème sera étudié au paragraphe 59.

Dans la vie courante, cette transgression de simultanéité dans les différents systèmes de référence n'est point sensible : la différence de temps est proportionnelle à B/c et cette quantité est toujours petite.

La relativité de la simultanéité, soulignons-le encore une fois, est conditionnée par la finitude de la vitesse de la lumière. Si l'on effectue le passage formel à la limite $c \to \infty$ (ce qui signifie au fait $\mathrm{B} \to 0$), la simultanéité devient absolue. Ce résultat se rapporte au cas des vitesses relatives petites des référentiels.

16. Relativité des longueurs des règles en mouvement. Maintenant, entreprenons la mesure de la longueur d'une règle en mouvement. Supposons que dans le système K on ait synchronisé des horloges et fait des repères dans l'espace. Admettons qu'une règle parallèle à l'axe des x se meuve à la vitesse V par rapport à K. A cette règle peut être associé le repère K'. La mesure de la longueur de la règle dans K' est facile à effectuer vu qu'elle y est au repos. Comment procéder à la mesure de la longueur de la même règle dans le système K? Il est évident qu'il faut déterminer les coordonnées des deux extrémités de la règle dans le système K, mais obligatoirement de la façon *simultanée* dans ce système. Cette dernière exigence amène à un résultat peu commun : la longueur de la règle mesurée dans le référentiel par rapport auquel elle se meut s'avère inférieure à celle mesurée dans le référentiel où elle est au repos. Supposons donc que la règle soit immobile dans le référentiel K' et les coordonnées de ses extrémités soient égales à x'_1 et x'_2. Par définition, sa longueur dans K', appelée, comme nous l'avons déjà mentionné, longueur propre de la règle, est égale à $x'_2 - x'_1$. Désignons sa longueur propre

par l_0 c.-à-d. $l_0 = x'_2 - x'_1$. Etant donné que la règle est au repos dans K', la simultanéité des mesures ne nous intéresse plus.

Dans le système K, les coordonnées de la règle seront définies selon la transformation de Lorentz [voir (II, 8)]

$$x'_2 = \Gamma(x_2 - Vt_2), \quad x'_1 = \Gamma(x_1 - Vt_1).$$

Pour déterminer la longueur de la règle dans le système K, il faut y considérer deux événements simultanés: la coïncidence de l'extrémité gauche avec un repère spatial de K (disons x_1) et la coïncidence de l'extrémité droite avec un repère spatial de K (disons x_2). Sans aucun doute, ces deux événements sont obligatoirement simultanés. Donc, il faut poser $t_1 = t_2$. Alors, en formant la différence $x'_2 - x'_1$, on a:

$$x'_2 - x'_1 = \Gamma(x_2 - x_1).$$

En désignant par l la différence des coordonnées des extrémités de la règle dans K, qui n'est autre que la longueur de la règle dans K, nous pouvons écrire:

$$l = \frac{l_0}{\Gamma} = l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{1}$$

Toutes les conditions étant les mêmes, on peut se servir également des formules de la transformation inverse

$$x_1 = \Gamma(x'_1 + Vt'_1), \quad x_2 = \Gamma(x'_2 + Vt'_2).$$

En retranchant la première équation de la deuxième, on obtient:

$$l = \Gamma l_0 + \Gamma V(t'_2 - t'_1).$$

Si maintenant on exprime $t'_2 - t'_1$ au moyen de x et t d'après les formules (II, 8) ou (II, 17), on revient à la formule (1). Celle-ci, comme nous l'avons déjà vu, découle directement des postulats d'Einstein (voir le paragraphe 11) et, en outre, elle est aisément déduite de l'invariance de l'intervalle (paragraphe 20). Essayons maintenant de trouver la signification physique de la formule (1).

Il s'ensuit de ce qui précède que la longueur d'un corps physique (d'une règle par exemple) est relative, en d'autres termes, elle dépend du référentiel choisi. La longueur maximale est observée dans le système où la règle est au repos. Les mesures de la longueur effectuées dans tout système par rapport auquel la règle est en mouvement donnent les valeurs inférieures à la longueur propre. Le procédé de la détermination de la longueur de la règle en mouvement n'est pas du tout unique. Néanmoins, tous les procédés aboutissent au même résultat.

Que signifie la contraction de la règle? Il n'est pas rare d'entrendre la question que voici: est-ce que la règle devient « réellement » plus courte? Certes, il est clair qu'en réalité la règle n'a subi aucun

raccourcissement. Cela découle du principe fondamental de la Relativité restreinte qui exige l'équivalence de tous les référentiels d'inertie dans lesquels l'état physique de la règle est le même. C'est pourquoi il ne peut être question de l'apparition de tensions ou déformations quelconques qui entraîneraient la contraction de la règle. Cette contraction n'est fonction que du procédé de mesure de la longueur dans les deux systèmes de référence. Par suite, il n'y a aucune contraction réelle.

On demande souvent : quelle est la longueur « réelle » de la règle? Posée de cette façon, la question est absurde. La question sur la longueur de la règle a le sens seulement par rapport à un référentiel quelconque. Dans chaque système de référence la règle a sa longueur ; c'est bien sa longueur « réelle ». Tous les référentiels sont équivalents et toutes les longueurs de la règle par rapport à ces référentiels sont également équivalentes. Dans tout référentiel la règle se comportera comme si elle avait la longueur déterminée dans ce système. Il existe quand même pour la règle un système de coordonnées « privilégié », à savoir, un système où elle est au repos. Du point de vue de nos concepts habituels c'est justement une « vraie » longueur de la règle. Cependant, elle ne définit le comportement de la règle que dans ce « propre » système de référence.

Prenons deux règles identiques 1 et 2 pour les comparer dans le système de coordonnées où elles sont au repos. Alors $l_1 = l_2$. Supposons que la règle 2 se meuve à la vitesse V. Associons à cette règle un système K'. Par rapport au système K

$$l_2 < l_1 \tag{*}$$

et pour le système K'

$$l_1 < l_2. \tag{**}$$

Cependant, (*) est obtenue avec des règles et horloges du système K, tandis que (**) avec celles du système K', et c'est la raison pour laquelle les résultats ne sont pas contradictoires. La différence entre les valeurs de la longueur de la règle est due au fait que la simultanéité est définie différemment dans les systèmes K et K'. Les positions simultanées de l'origine et de la fin de la règle dans un système ne le sont plus dans un autre.

La variation de la longueur d'un corps en mouvement est une conséquence paradoxale de la Relativité restreinte, puisque, dans la pratique journalière, on n'en voit pas d'exemples. Envisageons le mouvement relatif de la Terre sur son orbite. Dans ce cas $V =$ $= 30$ km/s. La relation $\frac{V}{c} \sim 10^{-4}$, et on a

$$l = l_0 \sqrt{1 - 10^{-8}} \cong l_0 \left(1 - \frac{1}{2} 10^{-8}\right) \approx l_0.$$

Il est à souligner une fois de plus que la contraction des longueurs est une conséquence directe de la finitude de la vitesse de la lumière.

Si cette dernière était infinie, alors, comme on le voit de la formule (1), la longueur de la règle aurait été la même pour tous les repères. Cela découle tout naturellement du fait que la simultanéité des événements devient absolue pour $c \to \infty$.

Comme, en vertu de la transformation de Lorentz, $y' = y$ et $z' = z$, les dimensions transversales du corps ne sont pas modifiées. Par conséquent, la variation du volume quand on passe de K à K' s'écrit sous la forme :

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_0 \sqrt{1 - \mathrm{B}^2}, \qquad (2)$$

où $\mathfrak{B}_0$ est le volume « propre » du corps.

En conclusion, envisageons encore un problème. Admettons que nous observons à l'œil nu ou à la télévision le mouvement rapide d'un ballon (ce qui est plutôt une expérience de pensée). Après tout, on s'attendait à voir ce ballon sous forme d'ellipsoïde aplati dans le sens du mouvement. Ceci paraissait évident. Pourtant, l'expérience n'a pas confirmé cette hypothèse. Sans aucun doute, la mesure du diamètre du ballon dans le sens de son mouvement décèlera la réduction de ce diamètre par rapport aux autres diamètres qui sont perpendiculaires au mouvement. Mais voir signifie au juste percepter des signaux lumineux envoyés depuis les points correspondants; étant donné que le temps de la propagation de la lumière à partir des points différents du corps en mouvement jusqu'à l'observateur est fini, la forme apparente du ballon mobile reste exactement la même que pour le ballon qui est au repos par rapport à l'observateur.

17. Relativité des intervalles de temps entre les événements. Admettons que deux événements aient lieu en un certain point x', y', z' du système K' à des moments de temps t_1' et t_2'. Cet intervalle de temps peut être marqué par l'horloge de ce point x', y', z' et est égal à

$$\Delta t' = T_0 = t_2' - t_1'.$$

T_0 est l'intervalle de temps entre les événements au sein du système où ils affectent un même point d'espace et sont fixés par une même horloge.

Il en est tout autrement pour le système K. En effet, si dans le système K' deux événements ne sont pas simultanés mais ont lieu en un même point d'espace ($x_1' = x'$, t_1') et ($x_2' = x'$, t_2'), alors, selon les formules (II, 17), nous aurons dans K

$$x_1 = \Gamma (x_1' + V t_1') = \Gamma (x' + V t_1'),$$
$$x_2 = \Gamma (x_2' + V t_2') = \Gamma (x' + V t_2'),$$

et, par conséquent,

$$x_2 - x_1 = \Gamma V (t_2' - t_1') \neq 0.$$

Quoique les événements du système K' aient lieu en un même point et $x'_2 - x'_1 = 0$, les mêmes événements dans K n'ont pas lieu au même point et $x_2 - x_1 \neq 0$, sauf le cas où ils étaient également simultanés dans K', en d'autres termes, ils se confondaient tout simplement. La coïncidence des événements est un fait absolu, indépendant du choix du référentiel.

Déterminons maintenant l'intervalle de temps séparant les événements dans le référentiel K. Pour ce faire, on a besoin des moments de temps relatifs à ce couple d'événements de K. D'après la transformation de Lorentz (II, 17)

$$t_1 = \Gamma\left(t'_1 + \frac{B}{c} x'_1\right), \quad t_2 = \Gamma\left(t'_2 + \frac{B}{c} x'_2\right).$$

En formant la différence de ces expressions et compte tenu de $x'_2 = x'_1$, on tire :

$$t_2 - t_1 = \Gamma(t'_2 - t'_1).$$

En désignant par T la différence $t_2 - t_1$, qui est égale à l'intervalle de temps entre deux événements étudiés dans K, récrivons la dernière égalité sous la forme :

$$T = \Gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

Ce résultat nous est déjà familier (chap. II, paragraphe 11). L'intervalle de temps d'un même couple d'événements est fonction d'un référentiel. La durée minimale entre deux événements est propre au système où ils ont lieu en un même point et sont donc repérés par une même horloge. Dans ce cas on dit qu'on mesure l'intervalle de temps propre en un point donné. Nous allons voir dans le paragraphe 21 que dans les conditions déterminées (à savoir, au cas où l'intervalle entre les événements est du genre temps) il existe toujours un référentiel d'inertie où les deux événements considérés s'associent en un même point de l'espace. Cela revient à dire qu'un certain système d'inertie permet de mesurer l'intervalle entre les événements comme intervalle de temps propre.

Introduisons maintenant la notion de *temps propre d'un corps*. Soit un corps qui se déplace d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à K. Attachons au corps mobile le repère K' ; le corps y sera immobile et les événements qui lui sont associés sont fixés par une seule horloge. Celle-ci indique le temps propre au point de l'emplacement du corps ; on peut dire qu'elle mesure le temps propre du corps. La formule (3) montre dans ce cas que l'intervalle de temps propre entre les événements est toujours inférieur à tout autre intervalle entre les mêmes événements mesuré par les horloges d'un référentiel quelconque relativement auquel le corps est en mouve-

ment. N'oublions pas à cet effet que l'intervalle de temps propre est donné par une seule horloge, tandis que dans le système où le corps est en mouvement, il faut au moins deux horloges pour mesurer l'intervalle de temps. Cette remarque est nécessaire pour démentir le point de vue erroné dont le sens sommaire consiste en ce que l'horloge en mouvement retarde sur l'horloge immobile. En effet, dans tous les systèmes les horloges marchent au même rythme. Seule, la mesure des intervalles varie. Cela n'a rien d'étonnant, car l'horloge synchronisée dans un référentiel d'inertie ne l'est plus dans un autre.

La notion de temps propre ne s'applique pas uniquement au cas où le corps est en mouvement uniforme et rectiligne. Si le corps se déplace de façon quelconque, sa translation est en tout cas uniforme et rectiligne pour de petits intervalles de temps. Si, avec cela, une horloge associée au corps mobile indique l'intervalle $d\tau$ entre les événements concernant ce corps, l'intervalle dt entre ces mêmes événements selon une horloge d'un autre référentiel par rapport auquel le corps est en mouvement sera égal à

$$dt = \gamma\, d\tau, \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{4}$$

A présent, $v = v\,(t)$ est déjà la vitesse instantanée du corps (et non du repère) d'où les nouvelles notations β et γ. Lorsque la vitesse du corps est variable et donnée par la relation $v = v\,(t)$, l'intervalle de temps propre est relié avec celui de temps, selon l'horloge du système en mouvement relatif, par

$$\tau - \tau_0 = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 - \left(\frac{v\,(t)}{c}\right)^2}\, dt.$$

Il est à noter qu'une telle modification en indications des horloges n'a rien à voir avec les troubles quelconques de leur rythme dans tel ou tel système. Comme pour la contraction des règles, ici, il s'agit tout simplement des différents procédés de mesure du temps. Toutes les horloges de tous les référentiels marchent au même rythme parfait. Toutefois, en comparant les indications des horloges dans un couple de référentiels d'inertie, on arrive à la conclusion que l'intervalle de temps propre entre les événements s'avère toujours le plus petit.

Envisageons un exemple, analogue à celui sur la contraction d'une règle qui montre que le ralentissement du temps est conditionné par le procédé de mesure. Soient deux horloges identiques A et A' dans K et K' respectivement (il peut s'agir des atomes de même espèce). Supposons qu'on observe l'horloge A à partir de K', c.-à-d. qu'on compare l'horloge A à celles synchronisées avec A'. On peut alors découvrir que l'horloge A retarde sur l'horloge A'.

Au contraire, si l'on observe l'horloge A' depuis le système K, A' retardera sur A.

Ces résultats, sont-ils contradictoires? Non. Car les méthodes de comparaison des horloges dans le premier et le second cas sont différentes. La seule horloge toujours en retard est celle qui est comparée aux horloges d'un autre système de référence.

Cet état de choses, bizarre du premier coup d'œil, est inévitable si on l'analyse de plus près. Le point de départ de la Relativité restreinte est l'équivalence de tous les référentiels d'inertie. Si cette équivalence échouait, lors de la mesure du temps, on pourrait s'en servir pour distinguer les systèmes.

Il n'y a pas longtemps, la Relativité restreinte reçut une directe confirmation expérimentale concernant le ralentissement du temps. Les particules légères, mésons μ ou muons, ont été découvertes d'une part au laboratoire par la désintégration des noyaux, et d'autre part on les a trouvées dans les rayons cosmiques. Leur vie moyenne mesurée au laboratoire est d'environ $2 \cdot 10^{-6}$ s, temps au bout duquel le méson μ se désintègre en d'autres particules. Il est connu que les mésons μ décelés près de la Terre dans les rayons cosmiques naissent dans les couches supérieures de l'atmosphère aux dépens du rayonnement cosmique primaire. La vitesse des mésons μ est comparable à celle de la lumière; c'est avec une telle vitesse qu'ils se dirigent vers la Terre. Mais la période radio-active d'un méson μ mesurée au laboratoire est une période d'après le temps propre. La période radio-active d'un méson mobile par rapport au référentiel de laboratoire est égale à $T = T_0\gamma$, où T_0 est la période dans le système propre. Pour un méson, $\gamma \sim 10$ et $T = 2 \cdot 10^{-5}$ s dans le référentiel de laboratoire. Pendant ce temps, il parcourra une distance de $cT = 3 \cdot 10^{10} \times 2 \cdot 10^{-5} \approx 6$ km. En mécanique classique faisant abstraction du ralentissement du temps, il n'aurait parcouru que 600 m, ce qui rendrait impossible sa découverte au niveau de la mer. Ainsi, seule la Relativité explique le flux de mésons observé sur Terre.

En rapport avec ce résultat une autre question se pose de savoir s'il y a une influence de la variation relativiste du temps sur l'organisme vivant et, en particulier, sur l'âge des humains? Pour ne pas nuire à la cohérence de notre exposé, remettons cette question au chapitre IX, paragraphe 59.

18. Formules de la transformation des composantes de la vitesse lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre. Les formules de la transformation de Galilée des coordonées (I, 1) entraînaient la règle de transformation de la vitesse d'une particule (I, 3):

$$v' = v - V,$$

laquelle ne satisfaisait pas au deuxième postulat d'Einstein, car la vitesse de la lumière dans le vide n'était pas la même dans divers

référentiels d'inertie. La transformation de Lorentz donne naissance à d'autres formules de transformation de la vitesse qui satisfont aux postulats d'Einstein.

Envisageons la translation d'une particule relativement à un couple de référentiels K et K'. Les vitesses se déterminent d'une façon habituelle:

Dans K	Dans K'
Si	Si
$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$	$x' = x'(t'),\ y' = y'(t'),\ z' = z'(t'),$
alors	alors
$v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt},\quad v_z = \frac{dz}{dt}.$	$v'_x = \frac{dx'}{dt'},\quad v'_y = \frac{dy'}{dt'},\quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}.$

La relation entre x, t et x', t' étant établie (par la transformation de Lorentz), on peut choisir t pour variable indépendante. Quand t varie de dt, on obtient l'accroissement de toutes les variables; écrivons ces accroissements sous forme de différentielles en prenant directement les dérivées des relations de Lorentz [voir (II, 17)]:

$$dx = \Gamma(dx' + V\,dt'),\quad dy = dy',\quad dz = dz',\quad dt = \Gamma\left(dt' + \frac{\mathrm{B}}{c}\,dx'\right). \quad (5)$$

En divisant membre à membre les trois premières égalités (5) par la dernière, nous obtiendrons

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V\,dt'}{dt' + \frac{\mathrm{B}}{c}\,dx'},\qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\Gamma\left(dt' + \frac{\mathrm{B}}{c}\,dx'\right)},\qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\Gamma\left(dt' + \frac{\mathrm{B}}{c}\,dx'\right)}.$$

Dans chaque égalité obtenue, divisons par dt' le numérateur et le dénominateur du deuxième membre. D'où les formules définitives:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}\,v'_x},\qquad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}\,v'_x},\qquad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}\,v'_x}. \quad (6)$$

Ce sont bien les *formules de la transformation relativiste des vitesses* appelées parfois *formules de la composition des vitesses*. Cette dernière dénomination n'est pas très réussie vu que la loi vectorielle classique de l'addition des vitesses n'est plus valable en Relativité. D'après ces formules, les composantes de la vitesse dans le système K déduites des composantes v'_x, v'_y, v'_z dans le système K' et de la vitesse du système K par rapport à K' (cette dernière est égale à $-V$) sont v_x, v_y, v_z. Pour obtenir les formules de la transformation inverse, on change le signe de la vitesse V et on attribue les primes aux gran-

deurs non primées en les omettant là où elles étaient :

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - B\frac{v_x}{c}}, \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-B^2}}{1 - B\frac{v_x}{c}}, \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-B^2}}{1 - B\frac{v_x}{c}}. \qquad (7)$$

Il va de soi que la même réponse est obtenue si l'on tire les expressions de v'_x, v'_y, v'_z directement des formules (6).

Les expressions (6) et (7) montrent que l'axe des x n'est pas équivalent aux axes des y et des z, ce qui s'explique seulement par le fait que la vitesse relative des systèmes de coordonnées K et K' est dirigée suivant l'axe des x.

Si $B \to 0$ dans les formules (6) et (7), c.-à-d. si l'on y pose formellement $c \to \infty$, on revient à la transformation de Galilée. Ainsi donc, pour deux systèmes de coordonnées dont la vitesse relative est petite par rapport à celle de la lumière, la transformation de Galilée est suffisamment exacte. C'est la raison pour laquelle la pratique quotidienne n'exige pas d'application de la Relativité. Nous nous sommes assurés une fois de plus que la différence entre les concepts relativistes et classiques est liée à la finitude de la vitesse de la lumière.

La relation (5) entraîne une égalité bien remarquable :

$$\frac{dt}{dt'} = \Gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}v'_x\right).$$

Si dans un référentiel d'inertie l'événement 1 est une cause et l'événement 2 sa conséquence, alors il est évident que l'événement 1 a lieu « plus tôt » que l'événement 2. Mais l'ordre chronologique des événements liés entre eux par des relations de cause à effet ne peut pas changer par suite du passage d'un référentiel d'inertie à un autre. Il en découle que $\frac{dt}{dt'}$ est toujours positif. Par conséquent, la vitesse v'_x est toujours inférieure à c, comme il vient avec évidence de la formule ci-dessus (rappelons que V prend des valeurs positives aussi bien que négatives). Ainsi les relations causales éventuelles font, une fois de plus, limiter les vitesses du signal par la célérité c.

Considérons un mouvement le long de l'axe des x'. Dans ce cas on a pour les composantes de la vitesse du système K' $v'_x = v'$, $v'_y = 0$, $v'_z = 0$. Des formules (6) on tire que les composantes v_y et v_z dans le système K sont nulles. Il s'ensuit que dans K le mouvement a lieu également le long de l'axe des x et que $v_x = v$. Donc, conformément à (6),

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'}. \qquad (8)$$

Si $v' = c$, de (8) découle $v = c$, ce qui correspond au deuxième postulat d'Einstein stipulant que la vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels d'inertie.

Avec cela notons immédiatement qu'il n'est pas logique de porter dans (8) $v' = c$, car des corps matériels ne peuvent pas se déplacer avec la vitesse c; or, la formule (8) est déduite pour des corps matériels. Toutefois, elle est valable pour les quanta de lumière — photons (voir chapitre VII) qui peuvent être considérés comme particules relativistes.

Les résultats de l'expérience de Fizeau fournissent un autre exemple d'utilisation de la formule (8). En son temps (1851), l'expérience eut une grande résonance et tenta à expliquer le problème

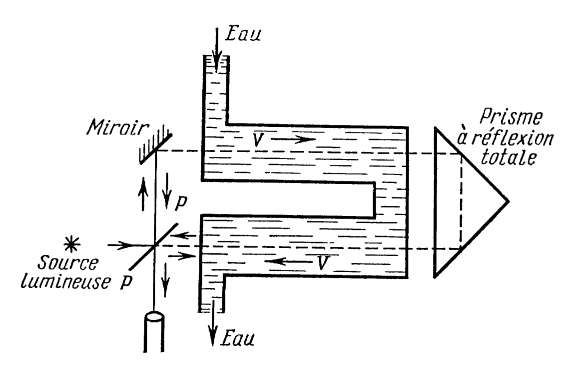


Fig. 11. Dispositif de Fizeau. Le rayon lumineux issu de la source se sépare par une glace semi-transparente PP en deux rayons dont l'un suit le courant d'eau et l'autre va en sens contraire. Fresnel, qui s'intéressait à la propagation de la lumière dans un milieu en mouvement, supposait que si la vitesse de la lumière dans l'eau stagnante était v' et celle du courant d'eau était V, alors la vitesse de la lumière v serait $v = v' \pm kV$ relativement à l'observateur immobile. Le signe $+$ correspond à la propagation de la lumière suivant le courant d'eau et le signe — dans le sens contraire; le facteur k est nommé coefficient d'entraînement. En partant de l'hypothèse de l'éther on pourrait obtenir pour le coefficient d'entraînement $k = 1$ si l'éther était entraîné complètement et $k = 0$ s'il était au repos. Fizeau se chargea de la recherche de ce coefficient. Il découlait des résultats de l'expérience que $k = 1 - \frac{1}{n^2}$ à la suite, paraissait-il, d'un mystérieux « entraînement partiel » de l'éther. La Relativité dévoile ce mystère (voir le texte). Cette expérience est exposée de façon détaillée dans les livres de Becker et de Sommerfeld (voir la bibliographie à la fin du livre).

suivant: les corps en mouvement, entraînent-ils l'éther? Fizeau chercha à déterminer la vitesse de la lumière dans un courant d'eau (fig. 11). La lumière se propageait dans un courant d'eau et sa vitesse était mesurée dans le référentiel de laboratoire d'après les interférences de deux faisceaux lumineux dont l'un suivait le courant d'eau et l'autre allait en sens contraire. Il suit des résultats de l'expérience de Fizeau que la vitesse de phase de la lumière dans l'eau stagnante est augmentée de la vitesse de l'eau V multipliée par le facteur $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, où n est l'indice absolu de l'eau. Ainsi, si la vitesse de

phase de la lumière dans l'eau stagnante est égale à $v' = \frac{c}{n}$ (adoptée en optique), la vitesse de phase dans le référentiel de laboratoire est égale à :

$$v = \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

A l'époque, ce résultat soutenait l'hypothèse de l'entraînement de l'éther par des corps en mouvement avec le « coefficient d'entraînement » $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Bien que la formule (8) soit déduite pour les vitesses des points matériels, tandis qu'il s'agit ici de la vitesse de phase de l'onde, nous l'utiliserons quand même. Dans le référentiel de laboratoire

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{cn}} \cong \left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{cn}\right) = \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

où V est petite ; la formule résultante est écrite à $\frac{V^2}{c}$ près. La formule d'Einstein de la transformation des vitesses fournit donc une explication naturelle du résultat de l'expérience de Fizeau.

Nous avons déjà dit que l'un des plus importants concepts de la physique moderne consistait en ce qu'il était impossible de transmettre un signal (une action) avec une vitesse supérieure à la vitesse c. Or, le corps mobile peut servir d'agent d'information (d'une impulsion par exemple), c'est pourquoi sa vitesse ne peut dépasser c. D'après la mécanique relativiste, un corps matériel (le corps qui possède une masse au repos) n'atteint jamais la vitesse de la lumière. Mais cela n'est valable que dans un référentiel déterminé. Pourrait-on, par un choix soigneux, trouver un référentiel d'inertie où la vitesse serait supérieure à c?

S'il découlait de la mécanique classique que dans un système donné la vitesse du corps ne dépassait jamais c, on pourrait trouver un référentiel où cette dernière serait dépassée. En effet, d'après la formule (I, 3) $v = v' + V$, où v' est la vitesse du corps relativement à K' et V la vitesse relative des systèmes K et K'. Si chacune des vitesses v' et V dépasse $0{,}5c$, la vitesse v du corps dans le système K sera supérieure à c. Donnons encore un exemple du même type. Soient deux corps se déplaçant dans le système K le long de l'axe des x dans des sens opposés avec la vitesse de $0{,}8c$. Leur vitesse relative est de $1{,}6c$. En rattachant le système K' à l'un des corps, nous obtiendrons pour l'autre corps la vitesse de $1{,}6c$.

Mais l'essentiel réside dans ce fait que la règle de Galilée de la composition des vitesses n'est plus valable pour des vitesses comparables à celle de la lumière dans le vide. L'addition des vitesses

en Relativité restreinte est régie par la formule $c + c = c$, impossible du point de vue classique.

Plus exactement, en Relativité restreinte le théorème de la composition des vitesses affirme que si la vitesse d'un corps dans le système K est inférieure à c et la vitesse de K' par rapport à K est, elle aussi, inférieure à c, alors la vitesse du corps dans le système K' ne dépassera pas c. Démontrons-le pour le cas décrit par la formule (8). Soit

$$U = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2}}$$

et

$$\frac{v'}{c} < 1, \quad \frac{V}{c} < 1. \tag{9}$$

Composons l'expression $\frac{U}{c} - 1$ et écrivons la suite d'égalités:

$$\frac{U}{c} - 1 = \frac{\frac{v'}{c} + \frac{V}{c}}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} - 1 = \frac{\frac{v'}{c} + \frac{V}{c} - 1 - \frac{Vv'}{c^2}}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} =$$

$$= \frac{\frac{v'}{c}\left(1 - \frac{V}{c}\right) - \left(1 - \frac{V}{c}\right)}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} = - \frac{\left(1 - \frac{V}{c}\right)\left(1 - \frac{v'}{c}\right)}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} < 0.$$

La dernière inégalité découle des conditions (9) et du fait que le dénominateur de la dernière expression est positif. Par conséquent :

$$\frac{U}{c} - 1 < 0 \quad \text{et} \quad U < c.$$

Ainsi donc, la vitesse du corps reste toujours inférieure à c lors du passage à n'importe quel système de référence.

Posons encore une question. Est-il possible, par des passages successifs d'un référentiel à un autre, d'obtenir une vitesse relative des référentiels qui dépasse c? Le système de référence étant un collectif des corps matériels, la réponse à cette question pourrait être fournie par le théorème précédent. Evidemment, en Relativité restreinte on ne peut atteindre en aucun cas une vitesse relative des référentiels plus grande que c. Nous allons quand même obtenir le même résultat par une autre voie très instructive en elle-même.

Introduisons, outre le système K, encore deux systèmes de coordonnées K' et K''. Quelle est la vitesse relative des repères K et K'' si celles de K et K', d'une part, et de K' et K'', d'autre part, sont connues? Soient V la vitesse relative de K et K' et W celle de K' et K''. Introduisant les notations $B_1 = \frac{V}{c}$ et $B_2 = \frac{W}{c}$

et $\frac{1}{\Gamma_1} = \sqrt{1 - B_1^2}$, $\frac{1}{\Gamma_2} = \sqrt{1 - B_2^2}$ respectivement, on a:

$$x = \Gamma_1 (x' + Vt'), \qquad t = \Gamma_1 \left(t' + \frac{B_1}{c} x'\right),$$

$$x' = \Gamma_2 (x'' + Wt''), \qquad t' = \Gamma_2 \left(t'' + \frac{B_2}{c} x''\right).$$

Portons les relations inférieures dans les supérieures pour trouver une relation directe entre les coordonnées et le temps dans les repères K et K'':

$$x = \Gamma_1\Gamma_2 (x'' + Wt'' + Vt'' + B_1B_2x'') =$$
$$= \Gamma_1\Gamma_2 \{(1 + B_1B_2) x'' + (V + W) t''\} =$$
$$= \Gamma_1\Gamma_2 (1 + B_1B_2) \left(x'' + \frac{V+W}{1+B_1B_2} t''\right). \qquad (10)$$

De même

$$t = \Gamma_1\Gamma_2 (1 + B_1B_2) \left(t'' + \frac{1}{c} \frac{V+W}{1+B_1B_2} x''\right). \qquad (11)$$

Désignons

$$\frac{V+W}{1+B_1B_2} = \frac{V+W}{1+\frac{V\cdot W}{c^2}} = U. \qquad (12)$$

Calculons le premier facteur faisant partie de (10) et (11):

$$\Gamma_1\Gamma_2 (1 + B_1B_2) = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-B_1^2)(1-B_2^2)}{(1+B_1B_2)^2}}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1+B_1^2B_2^2+2B_1B_2-(B_1^2+B_2^2+2B_1B_2)}{(1+B_1B_2)^2}}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{B_1+B_2}{1+B_1B_2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}.$$

Alors (10) et (11) s'écrivent sous la forme:

$$x = \frac{x'' + Ut''}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t'' + \frac{U}{c^2} x''}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}.$$

Il s'ensuit que deux transformations de Lorentz successives avec les vitesses relatives des référentiels égales à V et W sont équivalentes à une transformation avec la vitesse relative

$$U = \frac{V+W}{1+\frac{V\cdot W}{c^2}}. \qquad (13)$$

Autrement dit, les vitesses relatives des référentiels « s'ajoutent » également d'après (8). Or, cette composition ne donne jamais une vitesse qui aurait dépassé celle de la lumière.

La formule (13) s'obtient également sans opérations encombrantes. Du point de vue géométrique le passage de K à K' et ensuite de K' à K'' est une rotation successive dans le plan (x, τ) des angles φ_1 et φ_2, leurs tangentes étant égales à $\operatorname{tg} \varphi_1 = i\mathrm{B}_1$ et $\operatorname{tg} \varphi_2 = i\mathrm{B}_2$.

La tangente de l'angle résultant est donnée par la formule de la tangente de la somme de deux angles ($\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$) :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}$$

ou

$$i\mathrm{B} = \frac{i\mathrm{B}_1 + i\mathrm{B}_2}{1 + \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2},$$

qui représente justement la formule (13) si l'on substitue à B, B_l et B_2 leurs valeurs. Les deux dernières relations mettent en évidence la propriété essentielle de l'ensemble des transformations de Lorentz (du point de vue de la théorie mathématique des groupes) : deux groupes de Lorentz fournissent de nouveau un groupe de Lorentz (soulignons cependant l'importance du fait que la vitesse relative est toujours dirigée le long de l'axe des x).

19. Formules de transformation du module et de la direction de la vitesse. Les formules (6) de la transformation des composantes de la vitesse fournissent celles du module et de la direction de la vitesse dans le système K si les composantes de la vitesse dans K' sont connues. Avant tout il est évident que si dans K' la composante de la vitesse $v'_z = 0$, alors dans K $v_z = 0$ également. Donc, si le mouvement dans K' a lieu dans le plan (x', y'), dans K le mouvement aura lieu dans le plan (x, y). Choisissons les axes des x' et y' de façon que la vitesse de la particule de K' soit incluse dans le plan (x', y'). Alors il est évident que si la vitesse v' fait l'angle ϑ' avec l'axe des x', les composantes sont alors égales à $v'_x = v' \cos \vartheta'$, $v'_y = v' \sin \vartheta'$. Désignons par ϑ l'angle entre la vitesse v et l'axe des x dans le repère K. On aura donc $v_x = v \cos \vartheta$, $v_y = v \sin \vartheta$. Trouvons les formules reliant v et ϑ avec v' et ϑ'. Pour ce faire, récrivons les deux premières formules (6) en exprimant les composantes au moyen de v' et ϑ' :

$$v \cos \vartheta = \frac{v' \cos \vartheta' + V}{1 + \frac{v' \cos \vartheta'}{c} \mathrm{B}}, \quad v \sin \vartheta = \frac{v' \sin \vartheta' \sqrt{1 - \mathrm{B}^2}}{1 + \frac{v' \cos \vartheta'}{c} \mathrm{B}}. \qquad (14)$$

En divisant membre à membre la seconde relation par la première, nous obtenons l'expression de tg ϑ :

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{v'\sqrt{1-B^2}\sin\vartheta'}{v'\cos\vartheta'+V}. \tag{15}$$

Pour trouver la variation du module de la vitesse, il suffit d'élever au carré et d'additionner membre à membre les égalités (14), ce qui fournit immédiatement :

$$v^2=\frac{v'^2+V^2+2v'V\cos\vartheta'-v'^2B^2\sin^2\vartheta'}{\left(1+\frac{v\cos\vartheta'}{c}B\right)^2}=\frac{(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V})^2-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{V})^2}{\left(1+\frac{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{V}}{c^2}\right)^2}. \tag{16}$$

D'après les formules (15) et (16), le module de la vitesse et l'angle qu'elle fait avec l'axe des x (rappelons que les axes des x et x' coïncident géométriquement) sont modifiés lorsqu'on passe du système K' au système K.

Signalons la formule dérivant de (16) et dont nous nous servirons dans le chapitre VII. Composons, en tenant compte de la première relation de (16), l'expression suivante :

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{c^2\left(1+\frac{v'V}{c^2}\cos\vartheta'\right)^2-v'^2-V^2-2v'V\cos\vartheta'+\frac{V^2v'^2}{c^2}\sin^2\vartheta'}{c^2\left(1+\frac{v'V}{c^2}\cos\vartheta'\right)^2}=$$

$$=\frac{c^2-v'^2+\frac{V^2}{c^2}v'^2-V^2}{c^2\left(1+\frac{v'V}{c^2}\cos\vartheta'\right)^2}=\frac{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v'V}{c^2}\cos\vartheta'\right)^2}.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'V}{c^2}\cos\vartheta'}, \tag{17}$$

soit

$$\sqrt{1-\beta^2}=\frac{\sqrt{1-\beta'^2}\sqrt{1-B^2}}{1+\beta'B\cos\vartheta'}.$$

Des formules (14) et (15) on déduit aisément les formules définissant la déviation des rayons lumineux lors d'un changement de référentiel. En posant dans la formule (16) $v'=c$, nous parvenons au résultat attendu $v=v'=c$. Compte tenu de ce résultat, nous

avons respectivement de (15) et (14) :

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{1-B^2}}{B+\cos\vartheta'} \sin\vartheta', \tag{18}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{1-B^2}}{1+B\cos\vartheta'} \sin\vartheta', \quad \cos\vartheta = \frac{\cos\vartheta' + B}{1+B\cos\vartheta'}. \tag{19}$$

Les formules (19) décrivent le phénomène d'aberration de la lumière. Considérons le cas particulier du paragraphe 8. La lumière issue de l'Etoile polaire suit la normale au plan de l'orbite terrestre. Soit K' le système héliocentrique. La lumière se propage alors le long de la normale à la direction du mouvement. Avec un choix ordinaire du référentiel, cela signifie que la lumière va en sens opposé à celui de l'axe des y' $\left(\vartheta' = -\frac{\pi}{2}\right)$. De (18) on tire :

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{\sqrt{1-B^2}}{B}.$$

L'angle formé par les directions apparentes du rayon se propageant dans les deux référentiels d'inertie est appelé *angle d'aberration*. Dans le système K', la lumière cheminait le long de l'axe des y', et dans le système K sa direction faisait un angle $\alpha = -\frac{\pi}{2} - \vartheta = -\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)$ avec l'axe des y. Il est évident que l'angle α n'est autre que celui d'aberration dont la tangente est :

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = \operatorname{cotg} \vartheta = -\frac{B}{\sqrt{1-B^2}}.$$

L'angle d'aberration α tiré des formules de la transformation de Galilée (on laisse au lecteur le soin de faire ces opérations) aurait pour expression :

$$\operatorname{tg} \alpha = -B.$$

Donc, les deux formules, relativiste et classique, coïncident à B^2 près.

Ainsi, les formules de la transformation des vitesses en Relativité restreinte nous donnent les valeurs de l'angle d'aberration qui sont en plein accord avec celles fournies par l'expérience (voir le paragraphe 48). Nous attirons tout particulièrement l'attention du lecteur sur le fait suivant. Tout ce qui découle de la Relativité restreinte, quant à l'aberration, ce sont les formules définissant le changement de direction d'un rayon (d'un front d'ondes) lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre. Quand il s'agit d'une source ponctuelle, cela équivaut à un changement de direction de son observation. Souvent, par quiproquo, on relie les formules d'aberration au système héliocentrique. Cela est absolument faux.

Les formules (18) et (19) sont justes lors de n'importe quel changement de référentiel. Les observations astronomiques, il est vrai, sont souvent rattachées au système héliocentrique et à la Terre. Alors, il est tout à fait naturel de comparer les formules relativistes avec les données de ces observations dans les cadres de ces deux systèmes.

Nous pouvons également obtenir les formules de l'angle d'aberration pour une incidence quelconque de la lumière par rapport au mouvement. Pour le mouvement orbital de la Terre $B \ll 1$. D'après (19), on a:

$$\sin\vartheta = \left(1 - \frac{1}{2}B^2 + \ldots\right)(1 - B\cos\vartheta' + \ldots)\sin\vartheta'.$$

En négligeant tous les termes à partir de B^2, on obtient:

$$\sin\vartheta - \sin\vartheta' = -B\sin\vartheta'\cos\vartheta'.$$

L'angle $\vartheta' - \vartheta = \Delta\vartheta$ est l'angle d'aberration. Le deuxième membre proportionnel à B étant petit, $\Delta\vartheta$ est également petit:

$$\sin\vartheta - \sin\vartheta' = 2\cos\frac{\vartheta+\vartheta'}{2}\sin\frac{\vartheta-\vartheta'}{2} \approx -\cos\vartheta'\Delta\vartheta.$$

Par suite,

$$\Delta\vartheta = B\sin\vartheta'. \qquad (20)$$

C'est une formule élémentaire de l'aberration de la lumière dans le système K' sous l'angle ϑ'. La figure 12 représente la variation de la direction de la vitesse d'une particule lors du passage de K' à K, ainsi que le calcul de l'angle d'aberration pour l'incidence normale (par rapport au mouvement) de la lumière.

Calculons maintenant la vitesse relative de deux particules. Naturellement, on la définit comme la vitesse d'une des particules dans le système K où l'autre est immobile. Soient $\boldsymbol{v}_1'$ et $\boldsymbol{v}_2'$ les vitesses des particules dans K'. Choisissons un système de coordonnées K tel que $\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{v}_2'$. Alors la vitesse de la deuxième particule dans le système K est égale à $\boldsymbol{v}_2 = 0$. Quant à la vitesse $\boldsymbol{v}_1$ de la première particule, elle se détermine conformément à (16) où $-\boldsymbol{v}_2'$ remplace $\boldsymbol{V}$:

$$v_1^2 = \frac{(\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_2')^2 - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}_1' \times \boldsymbol{v}_2')^2}{\left(1 + \frac{\boldsymbol{v}_1'\boldsymbol{v}_2'}{c^2}\right)^2}. \qquad (21)$$

Cette expression détermine le carré du module de la vitesse relative de deux particules. Notons que (21) est symétrique par rapport à $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$.

20. Intervalle entre les événements. Dans le cas général, un couple d'événements considérés par rapport au même référentiel

ont lieu aux différents points et aux différents instants. Etudions deux événements I et II par rapport aux référentiels K et K'. Ecrivons leurs coordonnées :

$$\begin{array}{lll} & \text{Référentiel } K & \text{Référentiel } K' \\ \text{I} & x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1 & x_1',\ y_1',\ z_1',\ t_1' \\ \text{II} & x_2,\ y_2,\ z_2,\ t_2 & x_2',\ y_2',\ z_2',\ t_2' \end{array}\Bigg\}. \qquad (22)$$

Pour ne pas compliquer les formules, supposons que les événements aient lieu dans K sur l'axe des x, de sorte que $y_1 = 0$, $z_1 = 0$,

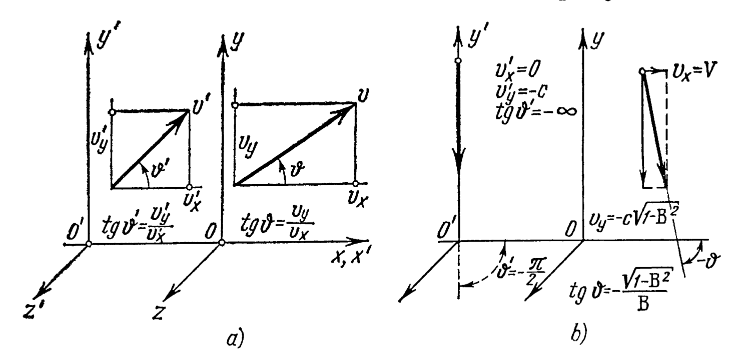


Fig. 12. *a*) La particule dans K' se meut dans le plan (x', y'). L'angle qu'elle fait avec l'axe des x' est égal à ϑ', sa tangente étant $\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{v_y'}{v_x'}$. Dans le système K, les composantes v_y et v_x sont modifiées conformément à (6), d'où l'angle ϑ n'est plus égal à ϑ' (voir également (15)). Pour le cas de la figure, $\vartheta' > \vartheta$. *b*) La lumière chemine le long de l'axe des y' du système K', c.-à-d. elle est en incidence normale à la direction du mouvement du système. Il est évident que $v_x' = 0$, $v_y' = -c$ et $\operatorname{tg}\vartheta' = -\infty$, autrement dit, $\vartheta' = -\frac{\pi}{2}$. Dans le système K, d'après (6), $v_x = V$, $v_y = -c\sqrt{1-\beta^2}$ d'où $\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{\sqrt{1-B^2}}{B}$. Cependant, l'angle d'aberration est l'angle formé entre la direction apparente d'arrivée de la lumière dans K et la direction de la lumière dans K', c.-à-d. l'angle qu'elle fait avec l'axe des y. L'angle d'aberration $\alpha = -\frac{\pi}{2} - \vartheta$. Il en vient l'expression de sa tangente : $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{B}{\sqrt{1-B^2}}$.

$y_2 = 0$, $z_2 = 0$. Alors en vertu de la transformation de Lorentz, $y_1' = 0$, $z_1' = 0$, $y_2' = 0$, $z_2' = 0$, c.-à-d. que dans le système K', les événements ont lieu également sur l'axe des x'.

D'après la transformation de Lorentz :

$$x_1' = \Gamma(x_1 - Vt_1), \qquad t_1' = \Gamma\left(t_1 - \frac{B}{c}x_1\right),$$

$$x_2' = \Gamma(x_2 - Vt_2), \qquad t_2' = \Gamma\left(t_2 - \frac{B}{c}x_2\right).$$

Composons les différences :

$$x'_2 - x'_1 = \Gamma \{(x_2 - x_1) - V(t_2 - t_1)\}, \tag{23}$$

$$t'_2 - t'_1 = \Gamma \left\{(t_2 - t_1) - \frac{B}{c}(x_2 - x_1)\right\}. \tag{24}$$

On voit de (23) et (24) que, dans les repères K et K', la distance spatiale entre deux événements, ainsi que l'intervalle de temps qui les sépare, sont relatifs, en d'autres termes, ils changent leurs valeurs lors du passage de K à K'.

Si, dans le système K, les événements I et II étaient séparés par la distance spatiale $x_2 - x_1$, alors dans le système K' leur distance est déjà égale à $x'_2 - x'_1$ d'après (23) et dépend tant de la différence des coordonnées des événements dans K que de la différence des moments de la réalisation des événements dans K. Les mêmes raisonnements sont valables pour les intervalles de temps séparant les événements I et II mesurés dans les systèmes K et K'.

Jusqu'ici nous heurtions les problèmes des événements de type particulier: en mesurant des longueurs, on considérait simultanément les coordonnées x_1 et x_2 des extrémités de la barre $(t_1 = (t_2$; pour mesurer les intervalles de temps, on fixait les moments t_1 et t_2 en un même point $x_2 = x_1$. Même dans ces cas, les intervalles spatiaux et temporels entre les événements se sont avérés relatifs. Rien d'étonnant qu'ils soient relatifs en cas général.

Voici un exemple d'utilisation des formules générales (23) et (24). Il s'agit d 'une méthode, différente de celle décrite au début du chapitre, de mesure de la longueur d'une règle en mouvement. Soit donc une règle en mouvement avec la vitesse V par rapport au système K. Il va de soi qu'on peut trouver aisément la vitesse du mouvement de la règle tout comme d'ailleurs de n'importe quel corps. En un point quelconque du repère K nous fixons, au moyen de l'horloge du repère, les moments t_1 et t_2 où l'origine et la fin de la règle passent par ce point. Evidemment, on peut prendre $l = V(t_2 - t_1)$ pour la longueur de la règle. Obtiendrait-on ainsi sa longueur « propre »? La réponse est donnée par la formule (23). Les événements considérés dans K s'associent en un point $x_2 = x_1$. Pour la différence $x'_2 - x'_1$ qui définit la longueur « propre » l_0 de la règle, la formule (23) nous fournit :

$$l_0 = l\Gamma;$$

c'est bien la formule (1).

Cependant, si au cours de la transformation de Lorentz la distance et l'intervalle de temps séparant les événements varient, demeure invariante leur combinaison :

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2.$$

L'invariance de cette expression pour un couple d'événements qui caractérisent la propagation de la lumière ($s_{12}^2 = 0$) est à la base de notre déduction de la transformation de Lorentz.

La vérification directe met en évidence l'égalité:

$$c^2 (t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 =$$
$$= \Gamma^2 \left\{ c^2 \left[(t_2 - t_1) - \frac{\mathrm{B}}{c} (x_2 - x_1) \right]^2 - [(x_2 - x_1) - V (t_2 - t_1)]^2 \right\} =$$
$$= c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2.$$

En tenant compte de ce qu'en vertu de la transformation de Lorentz $y = y'$, $z = z'$, nous en déduisons l'invariance de la quantité:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \qquad (25)$$

qui, comme il était déjà mentionné, s'appelle *intervalle* entre les événements. Pour deux événements infiniment proches *)

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (26)$$

ou en désignations symétriques:

$$ds^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\tau^2) = -dx_i^2 \qquad (27)$$
$$(\tau = x_4 = ict).$$

Dans l'espace fictif quadridimensionnel s_{12}^2 représente le carré de la « distance » entre les points et $-ds^2$ est le carré de l'élément d'arc de la ligne d'univers si l'on appelle toutes les lignes de l'espace quadridimensionnel de la Relativité restreinte *lignes d'univers*, comme l'a proposé Minkowski.

La relativité de la longueur de la règle découle directement de l'invariance de l'intervalle des événements. Soient x_1 la position de l'extrémité gauche de la règle à l'instant t_1 et x_2 celle de l'extrémité droite à l'instant t_2 (repère K). Les valeurs correspondantes dans K' seront munies de primes. En vertu de l'invariance de l'intervalle

$$c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2 (t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2.$$

Si l'on s'intéresse, dans K, aux valeurs simultanées des coordonnées il faut poser $t_2 = t_1$ (et alors, comme nous l'avons constaté, $t_2' \neq t_1'$) et l'on a:

$$|x_2 - x_1| < |x_2' - x_1'|.$$

---

*) Dans d'autres ouvrages, on peut rencontrer la définition de l'intervalle entre les événements différant par le signe. Du fait qu'il y a sous la racine (25) des valeurs positives et négatives, tous les résultats qui en découlent demeurent essentiellement les mêmes. Toutefois, toutes les conclusions concernant le signe de l'intervalle (voir plus bas) seront inverses. Notre choix du signe de l'intervalle coïncide en particulier avec celui adopté dans l'ouvrage de Landau et Lifchitz, *Théorie des champs*, Editions Mir, Moscou, 1970.

Le premier membre de cette inégalité représente la longueur de la règle en K et le second en K' (en supposant que la règle soit au repos en K', le choix des moments t'_1 et t'_2 devient arbitraire).

Par contre, si l'on pose $t'_2 = t'_1$, alors $t_2 \neq t_1$ et

$$|x_2 - x_1| > |x'_2 - x'_1|.$$

Ici c'est déjà le premier membre qui représente la longueur de la règle dans le système où elle est au repos (puisque ce n'est qu'en ce cas que t_2 et t_1 sont arbitraires). Ce raisonnement, dont le résultat nous est déjà familier, montre avec une évidence frappante l'équivalence de tous les référentiels d'inertie.

21. Classification des intervalles entre les événements. Etudions de nouveau un couple d'événements du point de vue de deux référentiels K et K' (22). En désignant dans K la distance spatiale par $l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ et la « distance » temporelle par $t_{12} = t_2 - t_1$ et en faisant autant pour les valeurs analogues dans le système K', nous pouvons écrire les intervalles sous la forme suivante:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2,$$
$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2;$$

en raison de l'invariance de l'intervalle on a $s_{12}^2 = s_{12}'^2$, c.-à-d.

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2. \tag{28}$$

Nous venons de considérer les événements I et II dans le référentiel K où ils ont lieu en différents points d'espace et aux instants différents.

Trois questions s'imposent alors. Peut-on, par un choix convenable de K', arriver à: a) faire coïncider les événements I et II en un même point d'espace, b) rendre les événements I et II simultanés, et, enfin, c) obtenir la coïncidence spatio-temporelle pour ces événements?

Donc, a) peut-on choisir un système K' tel que ces événements aient lieu en un même point d'espace? Cela signifie qu'on doit avoir dans le système K' $l'_{12} = 0$. Mais il découle alors de (28) que

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0, \tag{29}$$

c.-à-d. que $s_{12}^2 > 0$ et l'intervalle s_{12} doit être réel. Dans le système K', les événements considérés ont lieu en un même point d'espace et, au facteur c près, l'intervalle les séparant se ramène à l'intervalle temporel

$$t'_{12} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \tag{30}$$

C'est pourquoi les intervalles réels entre les événements sont dits *intervalles du genre temps*. La condition (29) peut être également écrite sous la forme $l_{12} < ct_{12}$.

L'intervalle entre les événements est toujours du genre temps s'ils concernent le même corps. En effet, la vitesse du corps est toujours inférieure à c; l_{12} est la distance spatiale parcourue par le corps (s'il est animé d'une translation rectiligne pendant l'intervalle de temps t_{12}). Le produit ct_{12} représente le chemin parcouru par la lumière au bout du même temps t_{12}. Il est évident que $l_{12} < ct_{12}$. Si le corps est immobile, cette inégalité est certainement remplie.

L'illustration de ce cas est fournie, par exemple, par un corps en mouvement rectiligne et uniforme. Admettons qu'il s'agisse d'un train dont les arrivées aux gares I et II sont les événements. Orientons les axes des x et x' des repères K et K' suivant la vitesse du train, le système K' étant attaché au train. Il est évident qu'au sol (système K) les événements I et II sont séparés tant dans l'espace que dans le temps. Dans le repère K', les événements I et II ont lieu en un même point de l'espace. Soient x_1 la coordonnée de la gare I et x_2, celle de la gare II ; t_1 et t_2 les moments d'arrivée aux gares I et II respectivement. Alors, la distance des gares est $l_{12} = x_2 - x_1$, l'intervalle de temps séparant les deux arrivées est $t_{12} = t_2 - t_1$. Dans le repère K, la vitesse du train est égale à :

$$U = \frac{l_{12}}{t_{12}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} . \tag{31}$$

Etant donné que la vitesse de tout corps est toujours inférieure à celle de la lumière, on a $U < c$. Il s'ensuit que $x_2 - x_1 < c\,(t_2 - t_1)$, autrement dit, l'intervalle séparant les deux événements est du genre temps.

Servons-nous des formules (23) et (24) en portant $t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{U}$ dans la première et $x_2 - x_1 = U\,(t_2 - t_1)$ dans la seconde. Dans un système arbitraire K' se déplaçant avec la vitesse V relativement au sol, nous obtenons pour les intervalles spatial et temporel :

$$x'_2 - x'_1 = \Gamma\,(x_2 - x_1)\left(1 - \frac{V}{U}\right), \tag{32}$$

$$t'_2 - t'_1 = \Gamma\,(t_2 - t_1)\left(1 - \frac{VU}{c^2}\right) . \tag{33}$$

On sait qu'en principe pour l'intervalle du genre temps existe toujours un référentiel K' au sein duquel les événements seront associés à un même point. Cela est évident (en exigeant que $x'_2 = x'_1$) à partir de (32) si $V = U$. Pour ce voir, on n'a besoin d'aucune formule vu que pour le reférentiel rattaché au train tous les événements relatifs au train coïncident dans l'espace.

Un résultat très important découle de la formule (33). Supposons que dans le système K l'événement II soit postérieur à l'événement I, c.-à-d. que $t_2 > t_1$ ou $t_2 - t_1 > 0$. Il découle de (33) qu'en vertu de ce que $1 - \frac{VU}{c^2} > 0$, on a aussi $t'_2 - t'_1 > 0$. Ainsi, en K', l'événement II est également postérieur à l'événement I. On voit que les notions « postérieur » ou « antérieur » pour ces deux événements, considérés par rapport à K et K', ont un caractère identique, absolu. En général, si un intervalle entre les événements est du genre temps (rappelons qu'il est invariant), l'ordre de succession temporelle est observé dans tous les référentiels d'inertie. Il en est autrement, comme nous verrons plus tard, pour les intervalles qui diffèrent de ceux du genre temps par le signe.

Les intervalles du genre temps possèdent encore une particularité importante. Nous avons maintes fois souligné qu'en Relativité restreinte la vitesse de la transmission du signal (de l'interaction) n'est jamais supérieure à c. L'inégalité qui caractérise l'intervalle du genre temps

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 < c^2 (t_2 - t_1)^2$$

montre que la lumière, durant le temps qui sépare les événements, peut notoirement parcourir la distance entre les points I et II où ces événements ont eu lieu (le produit $c(t_2 - t_1)$ est bien le chemin de la lumière durant $t_2 - t_1$). Il se peut donc qu'en un intervalle de temps entre les événements I et II une certaine interaction (signal) pourrait se propager du point de l'événement I au point où a lieu l'événement II. N'insistant en aucune façon sur le caractère général du problème, admettons qu'un événement ne soit influencé par l'autre qu'à l'aide d'interaction physique (de forces). Ainsi, si l'événement I a eu lieu, l'agent d'information pourra atteindre le point où aura lieu l'événement II avant ce dernier. Cela veut dire que l'événement I peut être la cause de l'événement II et l'événement II est alors une conséquence de l'événement I. Dans ce cas, il est admis de dire qu'ils sont liés de cause à effet. Donc, les événements séparés par l'intervalle du genre temps peuvent être liés par la relation de cause à effet. Bien entendu, cette relation n'est pas obligatoire. Là, il ne s'agit que de la possibilité de principe. Il importe que l'ordre de succession temporel ne soit jamais perturbé pour ces intervalles : la conséquence n'est pas susceptible d'influer sur sa cause.

b) Passons à présent aux intervalles de l'autre signe. Considérons de nouveau la condition d'invariance de l'intervalle

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$$

et tâchons de voir s'il existe un système K' tel que les deux événements donnés I et II soient simultanés. Pour le système en question, $t'_{12} = 0$.

Donc,

$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0.$$

Dans ce cas, l'intervalle entre les événements est imaginaire : $s_{12} = il'_{12}$. Au sein de K', les événements considérés coïncident dans le temps et l'intervalle entre eux se réduit (à l'unité imaginaire près dont l'apparition est conditionnée par l'introduction de la coordonnée imaginaire) à l'intervalle spatial

$$l'_{12} = is_{12}.$$

Voilà pourquoi les intervalles imaginaires sont dits *intervalles du genre espace.* La condition à laquelle doit satisfaire l'intervalle du genre espace s'écrit également sous la forme $l_{12} > ct_{12}$.

Comment tout de même obtenir un référentiel où $t'_{12} = 0$? Pour cela, il suffit dans (24)

$$t'_2 - t'_1 = \Gamma \left\{ (t_2 - t_1) - \frac{B}{c}(x_2 - x_1) \right\} \tag{34}$$

de poser $t'_2 - t'_1 = 0$ et d'en tirer la vitesse V (pour simplifier les formules on n'envisage que les événements ayant lieu sur l'axe des x). Donc, la vitesse du système sera

$$V = \frac{c\,(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1}\, c < c, \tag{35}$$

parce que par hypothèse

$$x_2 - x_1 > c\,(t_2 - t_1). \tag{36}$$

Mais il est facile de trouver un référentiel se mouvant à la vitesse inférieure à celle de la lumière. La valeur V de (35) réduira le deuxième membre de (34) à zéro. Si les valeurs de B sont petites, le second membre est notoirement positif. Ainsi donc, si l'on choisit un référentiel K^* avec la vitesse relative V^* qui satisfait à la condition $V < V^* < c$ (ce qui est bien possible), on aura toujours $t'_2 - t'_1 < 0$ indépendamment du signe de $t_2 - t_1$. Si, en K, l'événement I est antérieur à l'événement II, en K^* l'ordre de succession des événements sera inverse.

En conséquence, pour un couple d'événements séparés par l'intervalle du genre espace, les notions « antérieur » et « postérieur » sont relatives. Il serait absurde dans ce cas de parler de la relation causale quelconque. D'après son propre sens la condition

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 > c^2\,(t_2 - t_1)^2$$

témoigne du fait que, durant l'intervalle de temps entre les événements, aucun signal ne peut être transmis du point-événement I vers celui où l'événement II aura lieu. Par conséquent, les événements séparés par l'intervalle du genre espace ne sont point liés par la relation de cause à effet.

c) S'il s'agit de trouver un repère tel que les deux égalités $t'_{12} = 0$ et $l'_{12} = 0$ soient vérifiées, il faut que deux inégalités contradictoires $s_{12} \geqslant 0$ et $s_{12} \leqslant 0$ soient satisfaites. Mais elles sont toutes deux vérifiées si les événements se confondent déjà en K et l'intervalle s_{12} est égal à zéro. D'où naturellement $s'_{12} = 0$ et nous pouvons constater une fois de plus que la coïncidence des événements est absolue.

Il est logique d'appeler *intervalle isotrope* un intervalle séparant deux événements ayant lieu dans K en différents points à des instants différents et égal à zéro en valeur absolue. Il rattache les événements qui ont lieu lors du passage successif de l'onde lumineuse par divers points de l'espace. Nous l'avons déjà vu au début du paragraphe 13.

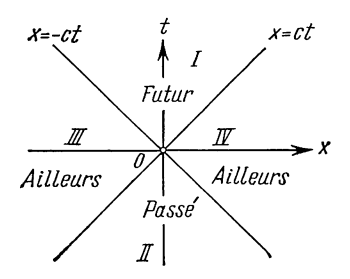


Fig. 13. Section du cône isotrope par le plan (x, t). Le point O est un événement donné. Par rapport à O, tous les événements figurant dans les quadrants III et IV appartiennent à la région « Ailleurs ». Les événements du quadrant I représentent « le Futur », ceux du quadrant II «le Passé».

En conclusion, tâchons de nous représenter géométriquement la position mutuelle des événements liés par les intervalles du genre espace, du genre temps et isotropes (pour plus de détail voir le chap. VIII). Envisageons un événement O; par souci de simplicité, associons-le au point $x = 0$ (sur l'axe des x) et à l'instant $t = 0$. Voyons maintenant comment s'y rattachent d'autres événements qui ont lieu à d'autres instants et en d'autres points de l'axe des x. Construisons dans le plan (x, t) le système de coordonnées cartésiennes. L'événement O a lieu à l'origine des coordonnées, les autres occupent de différents points de ce plan. Traçons dans le plan (x, t) des droites $x = \pm ct$, correspondant à la propagation des signaux lumineux le long de l'axe des x issus du point $x = 0$ à l'instant $t = 0$ dans deux directions possibles.

Les événements situés sur ces droites sont liés à l'événement O par les intervalles isotropes. Deux droites $x = \pm ct$ divisent le plan en quadrants I, II, III, IV représentés fig. 13. Pour les droites a lieu l'égalité $s^2 = c^2t^2 - x^2 = 0$. Dans le quadrant I, l'intervalle est égal à $s^2 = c^2t^2 - x^2 > 0$. Par conséquent, l'intervalle entre tout événement de la région I et l'événement donné O est du genre temps. Pour tous ces événements $t - t_0 = t > 0$ ($t_0 = 0$ est le temps de l'événement O). Donc, ils sont tous postérieurs à l'événement O, et cela quel que soit le système de référence. Il en résulte que I est la région du Futur par rapport à O. Dans le quadrant II, on a également $s^2 > 0$ mais $t - t_0 = t < 0$ pour tous les événements. D'une manière tout à fait analogue la région II est la région du Passé par rapport à l'événement O.

Dans les régions *III* et *IV*, $s^2 < 0$, c.-à-d. que l'intervalle entre tout événement de cette région et l'événement O est du genre espace. Tous ces événements ne se confondent jamais dans l'espace avec l'événement O et cela ne dépend pas du référentiel choisi. Mais on peut trouver des référentiels pour lesquels un événement des régions *III* ou *IV* aurait lieu « avant », « après » ou, enfin, « simultanément » relativement à l'événement O, car il n'y a aucun lien causal possible entre O et tous les événements de ces régions.

Dans l'espace quadridimensionnel complet, l'équation définissant la trajectoire de la lumière est de la forme $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$. Géométriquement, cette équation décrit un « cône » appelé le plus souvent *cône isotrope*. Les nappes intérieures du cône correspondent aux régions du Futur et du Passé. Le cône isotrope qui inclut les vecteurs isotropes se caractérise par ce que sa position dans l'espace quadridimensionnel reste inchangée pour chaque point d'univers, quel que soit le système de référence.

Supposons que l'événement consiste en l'arrivée du rayon lumineux au point d'univers déterminé (voir le paragraphe 54) où se trouve l'observateur. Il s'agit donc du repérage des signaux au point et à l'instant donnés. Ces signaux n'atteindront le point en question que suivant les directions de l'espace quadridimensionnel situées dans la région du Passé du cône. Faisons tendre toutes les génératrices du cône du Passé vers l'infini (suffisamment loin en années de lumière). A toute génératrice du cône on peut alors associer un point situé sur la sphère spatiale de rayon infiniment grand avec l'observateur au centre. Cette sphère conventionnelle dont on se sert lors des observations astronomiques est appelée *sphère céleste*.

CHAPITRE IV

CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE EN RELATIVITÉ RESTREINTE (MÉCANIQUE RELATIVISTE DU POINT MATÉRIEL)

22. Grandeurs cinématiques dans l'espace quadridimensionnel. Le principe fondamental reliant les forces et les accélérations est covariant par la transformation de Galilée mais il ne l'est plus par la transformation de Lorentz. Cependant, la transformation de Lorentz est une conséquence univoque des postulats d'Einstein dont les fondements sont expérimentalement justifiés. Pour satisfaire au postulat fondamental d'Einstein sur l'équivalence des référentiels d'inertie, il faut donc assurer la covariance des équations mécaniques par la transformation relativiste des coordonnées et du temps, ou la transformation de Lorentz. Il n'est pas donc difficile d'obtenir les équations mécaniques nécessaires si l'on se sert de la représentation géométrique quadridimensionnelle de la Relativité restreinte. C'est ce que nous allons faire.

Il faut noter que le développement de la science ne détrône pas tout à fait des lois connues, mais limite le domaine où elles règnent. Il existe toujours le principe de correspondance entre les différentes théories décrivant le même groupe de phénomènes dans différents cas limites. En ce qui concerne la mécanique relativiste, la majorité des formules classiques correspondent au cas limite ($\beta \to 0$) des formules relativistes. Autrement dit, la mécanique classique est le cas limite de la mécanique relativiste, correspondant aux vitesses petites par rapport à celle de la lumière. Mais la mécanique relativiste conduit aux conclusions auxquelles la mécanique classique ne fait aucune allusion (l'énergie au repos par exemple).

Comme nous l'avons déjà signalé, notre tâche consiste en construction des grandeurs physiques principales, utilisées en mécanique pour l'« univers » quadridimensionnel. Nous disposons de grandeurs tridimensionnelles qui nous sont familières et il serait sage d'en faire le point de départ. En construisant des grandeurs quadridimensionnelles, nous chercherons à faire correspondre leurs trois premières composantes (spatiales) aux grandeurs tridimensionnelles respectives. Le passage aux petites vitesses ($\beta \to 0$) doit assurer la transformation de ces trois premières composantes en grandeurs mécaniques usuelles.

Pour commencer, construisons la vitesse quadridimensionnelle (quadrivitesse) et l'accélération quadridimensionnelle (4-accéléra-

tion). Dans l'espace quadridimensionnel, tout point (événement) est défini par *quadrirayon vecteur* $\vec{R}$ muni des coordonnées $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ (tous les quadrivecteurs sont désignés par des lettres surmontées des flèches, par exemple, $\vec{R}$; on écrit parfois le quadrivecteur sous la forme $\vec{R}$ (r, ict)).

Le mouvement d'un point matériel dans l'espace quadridimensionnel est une suite d'événements qui consistent en ce que le point occupe une certaine place dans l'espace à un certain moment. Cela signifie que ledit point décrit dans le 4-espace une courbe appelée *ligne d'univers* d'un point. La ligne d'univers est une courbe unidimensionnelle et pour la définir il faut que ses quatre coordonnées soient fonction d'un paramètre. En mécanique classique, les trois coordonnées spatiales sont fonction du temps, quatrième variable indépendante, qui est invariant de la transformation de Galilée. Dans l'espace quadridimensionnel relativiste le temps est une coordonnée équivalente aux autres coordonnées et, par conséquent, il est non indépendant. Ainsi donc, le mouvement d'un point matériel dans l'espace de la Relativité restreinte est décrit par la variation de ses quatre coordonnées en fonction d'un paramètre. Or, celui-ci doit être invariant de la transformation de Lorentz. Le fait est que la vitesse tridimensionnelle est un vecteur et on voudra également conserver le caractère vectoriel de la vitesse dans l'espace quadridimensionnel. Soit l'équation du mouvement d'un point :

$$x_i = x_i(\tau) \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Il est logique de définir les composantes de la quadrivitesse comme suit :

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau}. \tag{1}$$

Cette quantité obéira à la transformation des vecteurs uniquement au cas où le dénominateur de (1) sera un scalaire. Cela vient du fait que les coordonnées x_i, ainsi que leurs accroissements Δx_i, forment un vecteur. Or, la division par un scalaire et le passage à la limite (dérivation) ne peuvent modifier le caractère vectoriel des grandeurs.

Il est naturel de prendre pour grandeur invariante attachée au mouvement d'un corps le temps propre du corps $d\tau$ (voir le paragraphe 17) ou l'intervalle qui lui est proportionnel. En considérant la variation des coordonnées du point dx_i par rapport à la variation du temps propre, nous obtenons les composantes de la quadrivitesse.

Dans certains ouvrages concernant la Relativité restreinte, on définit la quadrivitesse comme dérivée des coordonnées par rapport à l'intervalle qui est un invariant. Du point de vue formel, cela veut dire que l'on prend la dérivée du quadrirayon vecteur par rapport à la longueur d'arc de la ligne d'univers d'un point mobile

(voir les définitions nécessaires dans le chapitre VIII). Ces deux définitions de quadrivitesse en tant que dérivée par rapport au temps propre et dérivée par rapport à l'intervalle ne se distinguent que par le facteur constant c. En effet, supposons que dans le système K l'horloge mobile ait parcouru la distance $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ au bout du temps dt. Dans le système K', où elle est au repos, on a $dx' = dy' = dz'$, et l'intervalle dt' qui est égal au temps propre $d\tau$ découle de l'invariance de l'intervalle. Ecrivons l'expression de l'intervalle :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2,$$

d'où

$$dt' = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} =$$

$$= dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2\,dt^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt.$$

Nous sommes venus au résultat du paragraphe 11 (où l'on écrivait dt' au lieu de $d\tau$). Voici les formules qui nous seront utiles dans la suite :

$$dt = \gamma\, d\tau, \quad ds = c\, d\tau, \tag{2}$$

où $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ et $\beta = \frac{v}{c}$.

Le mouvement d'un corps est considéré comme une suite d'événements dont chacun représente le séjour du corps en un point et à un instant donnés. En attachant rigidement une horloge au corps (« *horloge propre* »), on mesure l'intervalle de temps $d\tau$ d'un couple d'événements à l'aide de cette horloge. Désignons par dt l'intervalle de temps de ce couple d'événements mesuré à l'aide d'une horloge du référentiel d'inertie par rapport auquel le corps se déplace avec une vitesse v. La relation entre ces intervalles de temps est définie par la formule (2).

Notons que le temps propre du corps mesuré au moyen d'une même horloge « propre » et le temps mesuré par différentes horloges dans le référentiel où le corps est au repos (pour la simplicité, la vitesse du corps est constante) ne sont pas du tout les mêmes du point de vue de tous les autres référentiels. Les horloges synchronisées dans un système ne le sont plus par rapport à tous les autres systèmes de référence. C'est la raison pour laquelle on introduit parfois le temps de repère, c.-à-d. le temps du système de référence donné, en supposant qu'il soit mesuré par différentes horloges d'un système déterminé. L'importance de ce fait est mise en évidence au paragraphe 59.

Revenons à la définition de la quadrivitesse. En prenant pour paramètre invariant le temps propre d'un corps, la relation (2)

entre ce temps et le temps du système relativement auquel le corps est en mouvement étant simple, il est facile de comprendre la signification des composantes de la quadrivitesse. Les trois premières composantes ont pour expressions:

$$u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dx_\alpha}{dt} = \gamma v_\alpha \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3), \tag{3}$$

où v_α sont les composantes de la vitesse tridimensionnelle usuelle. Ainsi donc, les trois premières composantes de la quadrivitesse sont les composantes de la vitesse tridimensionnelle usuelle à facteur γ près qui dépend de la valeur absolue de la vitesse d'une particule. Ecrivons à part la quatrième composante:

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \gamma \frac{d\,(ict)}{dt} = ic\gamma. \tag{4}$$

Si $\beta \to 0$, c.-à-d. si les vitesses du corps $v \ll c$, on a $\gamma \sim 1$, et les trois premières composantes de la quadrivitesse se confondent avec la vitesse usuelle. La quatrième composante de la vitesse est d'un intérêt particulier. Elle ne s'annule pas même au cas où la particule est au repos (pour $v = 0$, $\gamma = 1$ et $u_4 = ic$). Cette particularité a une signification bien claire. Le temps ne s'arrête pas, il s'écoule éternellement; le « repos » n'est donc jamais atteint dans l'univers quadridimensionnel (en ce sens que $\vec{V} = 0$). Quant à la vitesse d'écoulement du temps, elle est définie par un simple choix des unités de mesure du temps.

Mettons les composantes de la quadrivitesse sous la forme suivante:

$$\vec{V}\,(\gamma \boldsymbol{v},\ ic\gamma). \tag{5}$$

Les composantes de la quadrivitesse, comme celles de tout quadrivecteur, ne sont pas indépendantes. En effet,

$$\vec{V}^2 = u_i^2 = \gamma^2 v^2 + i^2 c^2 \gamma^2 = \gamma^2 c^2 \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = -c^2. \tag{6}$$

Il vient de cette dernière égalité que la valeur absolue de la quadrivitesse est invariante. Le cas général de l'invariance de la valeur absolue de tout quadrivecteur par rapport à la transformation de Lorentz est démontré en Appendice. La valeur absolue du quadrivecteur, tout comme celle du cas tridimensionnel, est une somme des carrés de ses composantes. Le carré de la quatrième composante est négatif car cette composante est imaginaire. Les quadrivecteurs, tout comme les intervalles, peuvent être du genre temps ($\vec{A}^2 < 0$) et du genre espace ($\vec{A}^2 > 0$). Nous venons de constater que la quadrivitesse est un quadrivecteur du genre temps. L'égalité (6) en est une confirmation, car cela signifie simplement que $v < c$. Dans

le système de référence où la particule est au repos au sens usuel (c.-à-d. que la vitesse tridimensionnelle $\boldsymbol{v}$ est nulle), on a:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = ic.$$

Une fois la vitesse dans l'espace à quatre dimensions écrite sous forme de quadrivecteur, la loi de sa transformation lors du passage d'un référentiel à un autre est établie. Supposons que dans le référentiel K soient données les composantes de la quadrivitesse $\vec{V}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Conformément aux formules (II, 26), nous obtenons pour K'

$$u_1' = \Gamma(u_1 + iBu_4), \quad u_2' = u_2, \quad u_3' = u_3, \quad u_4' = \Gamma(u_4 - iBu_1); \tag{7}$$

les composantes des quadrivitesses étant

$$\vec{V}(\gamma\boldsymbol{v}, ic\gamma), \quad \vec{V}'(\gamma'\boldsymbol{v}', ic\gamma'),$$

leur substitution dans (7) entraîne:

$$\left.\begin{aligned} \gamma' v_x' = \Gamma(\gamma v_x - \gamma V), \quad \gamma' v_y' = \gamma v_y, \quad \gamma' v_z' = \gamma v_z, \\ ic\gamma' = \Gamma(ic\gamma - iB\gamma v_x). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

La dernière relation de (8) a pour conséquence

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)}. \tag{9}$$

En portant (9) dans les trois premières relations (8), nous avons pour les composantes de la vitesse dans K':

$$v_x' = \frac{\gamma}{\gamma'}\Gamma(v_x - V), \quad v_y' = \frac{\gamma}{\gamma'} v_y, \quad v_z' = \frac{\gamma}{\gamma'} v_z,$$

c.-à-d. les formules (III, 7) tirées directement de la transformation de Lorentz.

Notons en passant que l'application des formules de la transformation inverse au lieu de celles du passage de K à K' fournit l'égalité analogue à la dernière égalité de (8):

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \Gamma\left(1 + \frac{V}{c^2} v_x'\right), \tag{9'}$$

ce qui donne l'expression de $\frac{\gamma}{\gamma'}$ au moyen des composantes de la vitesse du système K'. De (9') découle la formule obtenue directement dans le chapitre III:

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma'\Gamma\left(1 + \frac{V}{c^2} v_x'\right)} = \frac{\sqrt{1-\beta'^2}\sqrt{1-B^2}}{1 + \frac{V}{c^2} v_x'}.$$

L'immobilité de la particule dans K ($v = 0$) entraîne, d'après (9), $\gamma' = \Gamma$; cela est évident puisqu'une particule immobile en K se meut par rapport à K' avec la vitesse $-V$.

Nous construisons la 4-accélération comme le quadrivecteur $\vec{w}$. Définissons-le d'après son modèle tridimensionnel:

$$w_i = \frac{du_i}{d\tau} = \frac{d^2x_i}{d\tau^2}.$$

Les composantes de la 4-accélération peuvent s'exprimer par celles des vecteurs tridimensionnels $\boldsymbol{v}$ et $\dot{\boldsymbol{v}}$. Nous obtenons

$$w_\alpha = \frac{d}{dt}(\gamma v_\alpha)\frac{dt}{d\tau} = \gamma v_\alpha \frac{d\gamma}{dt} + \gamma^2 \frac{dv_\alpha}{dt} = \frac{\dot{v}_\alpha}{1-\beta^2} + \frac{v_\alpha(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}})}{c^2(1-\beta^2)^2},$$

puisqu'il est facile de voir que:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\beta\dot{\beta} \quad \text{et} \quad \frac{dt}{d\tau} = \gamma. \tag{10}$$

Trouvons la quatrième composante de l'accélération:

$$w_4 = \frac{d}{dt}(ic\gamma)\frac{dt}{d\tau} = ic\gamma\frac{d\gamma}{dt} = \frac{ic}{2}\frac{d\gamma^2}{dt} = ic\gamma^4\beta\dot{\beta} = \frac{i}{c}\frac{(\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{v}})}{(1-\beta^2)^2}.$$

Si le mouvement est uniforme ($\dot{\boldsymbol{v}} = 0$), la quatrième composante de l'accélération s'annule. Dans les systèmes de coordonnées où la particule est au repos ($\boldsymbol{v} = 0$):

$$w_1^0 = \dot{v}_x, \quad w_2^0 = \dot{v}_y, \quad w_3^0 = \dot{v}_z, \quad w_4^0 = 0, \tag{11}$$

autrement dit, trois composantes spatiales de la 4-accélération coïncident avec les composantes tridimensionnelles usuelles de l'accélération, tandis que la composante temporelle s'annule. Il suit de (11) que

$$\vec{w}_0^2 = w_i^{0^2} = \dot{\boldsymbol{v}}^2 > 0.$$

En vertu de l'invariance du carré du module du quadrivecteur (Appendice, paragraphe 1) on peut affirmer que le quadrivecteur accélération est du genre espace.

Ecrivons les composantes du quadrivecteur accélération $\vec{w}$:

$$\vec{w}\left(\gamma\frac{d}{dt}(\gamma\boldsymbol{v}),\ \frac{ic}{2}\frac{d\gamma^2}{dt}\right) \equiv \left(\gamma^2\dot{\boldsymbol{v}} + \gamma^4\beta\dot{\beta}\boldsymbol{v}, \frac{i\gamma}{m_0c}\frac{d\mathscr{E}}{dt}\right). \tag{12}$$

Nous introduisons l'énergie $\mathscr{E}$ de la particule en nous appuyant sur la formule (27) donnée plus loin.

Dans un référentiel arbitraire on a:

$$\vec{w}^2 = w_i^2 = \frac{\dot{\boldsymbol{v}}^2 - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{v}})^2}{(1-\beta^2)^3} > 0.$$

Si l'on dérive la relation (6) $u_i^2 = -c^2$ par rapport à τ, on obtient l'égalité :

$$u_i \frac{du_i}{d\tau} = 0, \tag{13}$$

qui signifie que dans l'espace quadridimensionnel pseudo-euclidien la vitesse et l'accélération de la particule sont « orthogonales » : l'expression (13) montre que leur produit scalaire est nul. Nous nous en servirons plus tard.

23. Force de Minkowski et principes de la conservation pour une particule. Maintenant nous pouvons établir le principe fondamental de la dynamique dans un espace quadridimensionnel. Pour les raisons de commodité, écrivons quelques relations classiques principales de l'espace tridimensionnel. Rappelons que la masse classique est constante. Désignons cette masse par m_0. Le principe fondamental classique s'écrit comme suit :

$$\frac{d}{dt}(m_0 \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}, \tag{14}$$

soit

$$\frac{dp}{dt} = \boldsymbol{F}, \tag{15}$$

où $\boldsymbol{F}$ est le vecteur force tridimensionnel usuel ; la grandeur $\boldsymbol{p} = m_0 \boldsymbol{v}$ s'appelle *impulsion classique du corps* (*du point matériel*).

En multipliant les deux membres de (15) par $\boldsymbol{v}\,dt$, nous en tirons comme conséquence du principe fondamental la relation suivante :

$$d\left(\frac{m_0 v^2}{2}\right) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\,dt. \tag{16}$$

Le second membre représente le travail de la force $\boldsymbol{F}$ tandis que le premier membre doit représenter, en vertu du principe de la conservation de l'énergie, la variation de l'énergie. Ainsi, on parvient à définir, à une constante arbitraire près, l'énergie du corps comme $T = \frac{m_0 v^2}{2}$. Ici, la constante est nulle et le corps au repos ne possède aucune énergie. Par conséquent, l'énergie $\frac{m_0 v^2}{2}$ n'est relative qu'au mouvement du corps ; on l'appelle *énergie cinétique* (« énergie du mouvement »). Si le corps au repos possédait l'énergie $\mathscr{E}_0$, l'énergie « totale » d'un corps mobile serait $\mathscr{E} = T + \mathscr{E}_0$. Si besoin est, on peut même interpréter la constante $\mathscr{E}_0$ comme énergie potentielle constante. Vu qu'il n'y a aucune raison d'introduire $\mathscr{E}_0$ dans la mécanique classique, on considère $\mathscr{E}_0$ en tant que constante arbitraire. Il en vient qu'en principe l'énergie classique « totale » d'un corps libre peut être de signe arbitraire (imposé

par celui de la constante $\mathscr{E}_0$). Notre choix ($\mathscr{E}_0 = 0$) fait coïncider l'énergie totale du corps libre avec l'énergie cinétique.

Supposons maintenant qu'une particule se trouve dans le champ de potentiel. Elle est donc soumise à une force dont l'expression est $\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U$, où $U(x, y, z)$ est l'énergie potentielle. Comme $\boldsymbol{v}\,dt = d\boldsymbol{r}$ et $\operatorname{grad} U \cdot d\boldsymbol{r} = dU$, la relation (16) prend la forme:

$$d\left(\frac{m_0 v^2}{2}\right) = -dU, \tag{17}$$

d'où le *principe classique de la conservation de l'énergie totale* $T + U = \text{const.}$ Rappelons qu'une grandeur est dite constante si elle ne varie pas avec le temps (si sa dérivée totale par rapport au temps est nulle).

Passons à présent à la 4-impulsion et à la 4-force. Tout d'abord définissons la 4-impulsion d'après le modèle tridimensionnel:

$$\vec{P} = m_0 \vec{V},$$

où m_0 est la masse invariante de la particule qu'il est rationnel d'appeler *masse au repos* (on le verra par la suite). Si l'on pouvait définir le quadrivecteur force de façon que ses trois premières composantes se rattachent à la force classique, on pourrait écrire l'équation vectorielle quadridimensionnelle dont les trois premières composantes se rapprocheraient par leur écriture des équations de la mécanique newtonienne. Présentons l'équation quadridimensionnelle sous la forme vectorielle proche de l'expression tridimensionnelle (15):

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F}, \tag{18}$$

où $\vec{F}$ est le quadrivecteur force qui est à déterminer. Mais pourquoi alors est-il si nécessaire d'écrire l'équation du mouvement sous la forme vectorielle quadridimensionnelle (18)? Cette nécessité est imposée par le premier postulat d'Einstein, d'après lequel toutes les lois physiques doivent avoir la même forme dans tous les référentiels d'inertie. Mathématiquement parlant, cela veut dire que les équations traduisant les lois physiques s'écrivent sous la forme covariante par la transformation de Lorentz. On dit que les équations sont écrites sous forme covariante si leurs deux membres se transforment de façon analogue par la transformation de Lorentz, ce qui signifie tout simplement que les deux membres doivent être soit les grandeurs scalaires (invariantes), soit les quadrivecteurs, soit, enfin, les tenseurs de même ordre (il en sera question dans le chapitre V). Ces conditions assurent déjà la conservation de la forme des relations ainsi écrites lors du changement de repère. En écrivant l'équation du mouvement sous forme vectorielle (18), nous lui conférons la covariance par la transformation de Lorentz et, partant, l'universalité du principe de relativité galiléen.

Evidemment, (18) peut s'écrire également en composantes:

$$m_0 \frac{du_i}{d\tau} = \mathfrak{F}_i, \tag{19}$$

où $\mathfrak{F}_i$ sont les composantes de la 4-force et dont la définition est remise à plus tard. On passe aisément du temps propre τ au temps usuel conformément à (2):

$$m_0 \frac{du_i}{d\tau} = m_0\gamma \frac{du_i}{dt}.$$

Sous cette condition, les trois équations (19) (pour $i = 1, 2, 3$) deviennent

$$m_0\gamma \frac{du_\alpha}{dt} = \mathfrak{F}_\alpha. \tag{20}$$

Si l'on pose

$$\mathfrak{F}_\alpha = F_\alpha\gamma, \tag{21}$$

où F_α sont les composantes de la force tridimensionnelle usuelle, alors les équations (20) acquièrent la forme fort peu différente de celle des équations newtoniennes *). En effet, portant (21) dans le second membre de (20), nous obtenons:

$$m_0\gamma \frac{du_\alpha}{dt} = F_\alpha\gamma,$$

soit

$$\frac{d}{dt}(m_0 u_\alpha) = F_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

La dernière équation peut être écrite sous forme tridimensionnelle vectorielle

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = \vec{F}. \tag{22}$$

Dans le deuxième membre de l'équation (22), il y a les composantes de la force tridimensionnelle classique et dans le premier membre, sous le signe de dérivation, il y a une quantité qu'il est logique d'appeler impulsion tridimensionnelle relativiste $\boldsymbol{p} = m_0\gamma\boldsymbol{v}$. On peut donc mettre (20) sous la forme vectorielle tridimensionnelle:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}, \tag{23}$$

où $\boldsymbol{p} = m_0\gamma\boldsymbol{v}$. Ainsi, les principes fondamentaux relativiste et classique diffèrent par définition de l'impulsion.

Trouvons maintenant la quatrième composante de la 4-force. Pour ce faire, il est commode de former le produit scalaire de (19)

*) La justification de cette proposition réside dans la coïncidence des résultats relativistes avec l'expérience.

par u_i. Compte tenu de « l'orthogonalité » entre l'accélération et la vitesse, on a :

$$\mathfrak{F}_i u_i = \mathfrak{F}_\alpha u_\alpha + \mathfrak{F}_4 u_4 = \gamma F_\alpha u_\alpha + \mathfrak{F}_4 ic\gamma = 0,$$

d'où il découle immédiatement

$$\mathfrak{F}_4 = -\frac{F_\alpha u_\alpha}{ic} = \frac{i\gamma}{c}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}). \qquad (24)$$

La quatrième composante de la 4-force $\vec{F}$ étant connue, nous pouvons obtenir celle de l'équation du mouvement (19) :

$$m_0\gamma \frac{du_4}{dt} = \frac{i\gamma}{c}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}) \qquad (25)$$

ou substituant $u_4 = ic\gamma$, simplifiant les facteurs communs et multipliant les deux membres par dt on a

$$d(m_0c^2\gamma) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\, dt. \qquad (26)$$

Le second membre de (26) représente le travail de la force ; on doit alors avoir, dans le premier membre, l'expression de la variation de l'énergie. Définissons l'énergie totale d'une particule relativiste libre au moyen de l'expression suivante :

$$\mathscr{E} = m_0c^2\gamma = m_0c^2(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (27)$$

où $\beta = \frac{v}{c}$, v étant la valeur absolue de la vitesse tridimensionnelle du point matériel. La formule (26) ne définit l'énergie du corps qu'à une constante près. La définition (27) sous-entend que la particule au repos ($v = 0$, $\beta = 0$) possède l'énergie $\mathscr{E}_0 = m_0c^2$. Ce choix de la constante n'est pas tout de même arbitraire et il est justifié par le passage à la formule classique de la composition des vitesses (passage à la limite) (voir la page 103).

Si la particule est dans un champ de potentiel, alors $\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\, dt = -dU$ d'où, au lieu de (17), nous obtenons $d(m_0c^2\gamma) = -dU$. Il en découle le *principe de la conservation de l'énergie totale de la particule relativiste se trouvant dans un champ de potentiel* (il s'agit de l'énergie « *totale* » dans le sens de la conservation de la somme de l'énergie totale de la particule relativiste et de l'énergie potentielle) :

$$m_0c^2\gamma + U = \text{const}.$$

La dernière relation peut être ramenée à la forme telle que le premier membre représente la somme des énergies « cinétique » et potentielle de la particule. Il sera montré plus loin qu'en Mécanique relativiste, l'énergie « cinétique » d'une particule se traduit par l'expression $T = m_0c^2(\gamma - 1)$. Compte tenu de cette formule, nous récrivons le principe de la conservation de l'énergie de la façon suivante :

$$m_0c^2(\gamma - 1) + U = \text{const}, \qquad (28)$$

où la constante est moditifiée de valeur m_0c^2. Nous nous servirons de cette formule lors de la résolution du problème relativiste de Kepler.

La quatrième composante de la 4-impulsion de la particule libre est liée directement à l'énergie de celle-ci. Une opération simple le démontre avec évidence:

$$P_4 = m_0 ic\gamma = \frac{i}{c} m_0 c^2 \gamma = \frac{i}{c} \mathscr{E}.$$

Il est donc naturel d'appeler le quadrivecteur $\vec{P}$ *vecteur énergie-impulsion*. De $u_i^2 = -c^2$ on obtient immédiatement:

$$P_i^2 = -m_0^2 c^2. \tag{29}$$

On voit alors que le vecteur énergie-impulsion de la particule libre est du genre temps. Ecrivons les composantes du quadrivecteur énergie-impulsion $\vec{P}$ et celles du quadrivecteur force F dite parfois *force de Minkowski*:

$$\vec{P}\left(m_0\gamma \boldsymbol{v}, \frac{i}{c}\mathscr{E}\right), \tag{30}$$

$$\vec{F}\left(\gamma \boldsymbol{F}, \frac{i}{c}\gamma(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v})\right). \tag{31}$$

Les définitions des quadrivecteurs $\vec{P}$ et $\vec{F}$ conduisent automatiquement à la loi de la transformation de leurs composantes [voir (II,26)]:

$$P_1' = \Gamma(P_1 + i\mathrm{B}P_4), \quad P_2' = P_2, \quad P_3' = P_3, \quad P_4' = \Gamma(P_4 - i\mathrm{B}P_1), \tag{32}$$

$$\mathfrak{F}_1' = \Gamma(\mathfrak{F}_1 + i\mathrm{B}\mathfrak{F}_4), \quad \mathfrak{F}_2' = \mathfrak{F}_2, \quad \mathfrak{F}_3' = \mathfrak{F}_3, \quad \mathfrak{F}_4' = \Gamma(\mathfrak{F}_4 - i\mathrm{B}\mathfrak{F}_1). \tag{33}$$

Portant les valeurs des composantes (30) dans (32), on a:

$$p_x' = \Gamma\left(p_x - \frac{\mathrm{B}}{c}\mathscr{E}\right), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z, \quad \mathscr{E}' = \Gamma(\mathscr{E} - Vp_x), \tag{34}$$

où on a adopté la notation $\boldsymbol{p} = m_0\gamma\boldsymbol{v}$ (*impulsion tridimensionnelle relativiste*). En portant les valeurs de (31) dans (33), on est conduit aux formules

$$\left.\begin{aligned} \gamma' F_x' &= \Gamma\left(\gamma F_x - \frac{\mathrm{B}}{c}\gamma(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v})\right), \quad \gamma' F_y' = \gamma F_y, \quad \gamma' F_z' = \gamma F_z, \\ \gamma'(\boldsymbol{F}'\boldsymbol{v}') &= \Gamma[\gamma(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}) - V\gamma F_x]. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

En mettant les relations (35) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} F_x' &= \frac{\gamma}{\gamma'}\Gamma\left\{F_x - \frac{\mathrm{B}}{c}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v})\right\}, \quad F_y' = \frac{\gamma}{\gamma'}F_y, \quad F_z' = \frac{\gamma}{\gamma'}F_z, \\ (\boldsymbol{F}'\boldsymbol{v}') &= \frac{\gamma}{\gamma'}\Gamma\{\boldsymbol{F}\boldsymbol{v} - VF_x\} \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

et compte tenu de (9), nous obtenons en définitive:

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= \frac{F_x - \frac{\mathrm{B}}{c}(\boldsymbol{Fv})}{1-\frac{V}{c^2}v_x}, & F'_y &= \frac{F_y\sqrt{1-\mathrm{B}^2}}{1-\frac{V}{c^2}v_x}, \\ F'_z &= \frac{F_z\sqrt{1-\mathrm{B}^2}}{1-\frac{V}{c^2}v_x}, & \boldsymbol{F'v'} &= \frac{(\boldsymbol{Fv})-VF_x}{1-\frac{V}{c^2}v_x}. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Il s'ensuit des formules de transformation (37) de la 4-force que, si dans un référentiel d'inertie quelconque il n'y a pas de force tridimensionnelle, elle ne surgira dans aucun autre référentiel. Ainsi donc, lorsqu'on passe d'un référentiel d'inertie à un autre les « forces » usuelles se transforment sans apparaître ni disparaître.

Ecrivons la loi de la transformation de la force dans un repère autre que le système K^0 où la particule est au repos ($\boldsymbol{v} = 0$):

$$F_x = F_x^0, \quad F_y = F_y^0\sqrt{1-\mathrm{B}^2}, \quad F_z = F_z^0\sqrt{1-\mathrm{B}^2}. \quad (38)$$

La quatrième relation de (37) nous fournit dans ce cas:

$$\boldsymbol{Fv} = -VF_x^0,$$

dont la signification est bien simple. Si dans le système K^0 la particule était au repos, elle se meut avec la vitesse $-V$ dans le système K. Seule la composante de la force F_x effectue le travail (les autres composantes de la force sont normales à la direction du mouvement). La puissance obtenue au cours du travail de la force F_x^0 dans le système K^0 est précisément égale à $-F_x^0V$, c.-à-d. ce qu'on vient d'obtenir.

Les formules (38) montrent que pour $\mathrm{B} \ll 1$ (cas classique), la force tridimensionnelle ne varie point lors du changement de référentiel. Ceci est en plein accord avec nos conceptions intuitives sur la constance de la force d'interaction dans n'importe quel référentiel.

Les formules (34) représentent la loi de la transformation de l'impulsion et de l'énergie d'une particule lors du passage de K à K'. Considérons une particule dans un référentiel où son impulsion tridimensionnelle relativiste $\boldsymbol{p} = m_0\gamma\boldsymbol{v}$ est nulle. Ce système où la particule est au repos ($\boldsymbol{v} = 0$) est appelé *système de référence propre*. Soit $\mathscr{E}$ l'énergie de cette particule dans le système en question. Alors, en ce qui concerne K', conformément à (34), on a:

$$\mathscr{E}' = \Gamma\mathscr{E}, \quad p'_x = -\Gamma\frac{\mathrm{B}}{c}\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{B}}{c}\mathscr{E}' = -\frac{\mathscr{E}'}{c^2}V. \quad (39)$$

D'après (39), tout transfert d'énergie est lié à l'apparition de l'impulsion. En effet, dans le système de référence propre, où la

particule était au repos, elle possédait l'énergie $\mathscr{E}$ qui ne se transportait pas dans l'espace. L'impulsion de la particule (c.-à-d. de l'agent de transport d'énergie) était alors nulle. Dans K', la particule est déjà mobile et sa vitesse est égale à $-V$. On peut dire alors que l'énergie, elle aussi, « s'écoule » avec la même vitesse. La formule (39) pour p'_x montre la relation entre le transport d'énergie et l'impulsion $p'_x = -\Gamma \frac{\mathscr{E}}{c^2} V$. Signalons que celle-ci se confond avec l'impulsion tridimensionnelle relativiste si, conformément à (27), on admet que $\frac{\mathscr{E}}{c^2} = m_0$; la vitesse de la particule est $-V$ et Γ coïncide dans ce cas avec γ.

Notons qu'en mécanique newtonienne rien de semblable ne puisse avoir lieu. Dans ce cas l'énergie de la particule est égale à $\frac{mv^2}{2}$; pour la particule immobile, les valeurs de l'énergie et de l'impulsion sont nulles. C'est bien la découverte de l'énergie au repos qui a permis de relier l'impulsion au transport d'énergie.

Ainsi donc, l'agent de transport d'énergie doit posséder une impulsion. Ce résultat est obtenu pour la particule mais il s'applique encore au champ électromagnétique (chap. V), à la thermodynamique de la Relativité restreinte (chap. VI) et aussi à certains problèmes mécaniques (chap. IX).

La relation entre l'énergie et l'impulsion d'une particule libre découle directement de l'invariance du carré du quadrivecteur $\vec{P}$; en effet, nous avons vu [voir (29)] que $\vec{P}^2 = -m_0^2c^2$. En introduisant l'impulsion relativiste tridimensionnelle $\boldsymbol{p} = m_0\gamma\boldsymbol{v}$, on est conduit à

$$\vec{P}^2 = p^2 - \frac{\mathscr{E}^2}{c^2} = -m_0^2c^2,$$

d'où

$$\mathscr{E} = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}. \tag{40}$$

Dans un champ conservatif, la quantité $\mathscr{E} = m_0^2c^2\gamma + U$ pour une particule demeure constante [voir (28)], c.-à-d. qu'elle ne dépend pas du temps dans le référentiel d'inertie donné, nonobstant les variations de la vitesse et de l'énergie potentielle de cette particule. La grandeur $\mathscr{E}$ peut être appelée *énergie totale d'une particule dans le champ conservatif*. Il va de soi que cette quantité se conserve dans tout repère mais elle change sa valeur (constante) contre une autre lors de la transition d'un référentiel à un autre. La définition de la 4-impulsion d'une particule sous la forme $\vec{P} = m_0\vec{V}$ reste en vigueur dans le cas du champ conservatif mais, à la place de (30), on écrira $P\,[m_0\gamma\boldsymbol{v}, \frac{i}{c}(\mathscr{E} - U)]$, tandis que de $\vec{P}^2 = -m_0^2c^2$

on tire

$$\mathscr{E} = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} + U \qquad (40')$$

au lieu de (40).

L'énergie du système exprimée en fonction de son impulsion s'appelle *fonction hamiltonienne* du système. Ainsi donc, (40) et (40') sont respectivement les fonctions hamiltoniennes d'une particule libre et d'une particule dans un champ conservatif (voir le paragraphe 31 où ces fonctions sont introduites d'une autre façon). Dans les deux cas, l'impulsion relativiste tridimensionnelle s'exprime en fonction de l'énergie totale et de l'impulsion d'une particule:

$$\boldsymbol{p} = m_0\gamma \boldsymbol{v} = \frac{1}{c^2} m_0 c^2 \gamma \boldsymbol{v} = \frac{\mathscr{E}}{c^2} \boldsymbol{v}, \qquad (41)$$

$$\boldsymbol{p} = m_0\gamma \boldsymbol{v} = \frac{1}{c^2} m_0 c^2 \gamma \boldsymbol{v} = \frac{\mathscr{E} - U}{c^2} \boldsymbol{v}. \qquad (41')$$

La formule (41) correspond parfaitement à la seconde formule de (39). La transformation que subit la quatrième composante du vecteur énergie-impulsion de la particule dans un champ de potentiel, indique, conformément à (34) [à cet effet il est commode d'appliquer (9)], que dans le repère K' on obtient pour l'énergie totale $\mathscr{E}' = m_0c^2\gamma' + U'$, c'est ce qu'on doit avoir.

Formulons brièvement les faits obtenus. Dans l'espace quadridimensionnel de la Relativité restreinte, nous avons défini les quadrivecteurs de la vitesse $\vec{V}$, de l'énergie-impulsion $\vec{P}$ et de la force de Minkowski $\vec{F}$. Ensuite, nous avons établi le principe fondamental (18) sous forme quadridimensionnelle qui donne la relation entre la 4-accélération et la 4-force. Celui-ci est l'analogue quadridimensionnel du principe fondamental tridimensionnel. La forme quadridimensionnelle vectorielle assure déjà la conservation de la forme générale de cette équation dans tous les référentiels d'inertie (la forme de l'équation (18) du repère K' sera la même que pour K mais les grandeurs non primées seront remplacées par celles primées). Cela vient de ce que les deux membres de l'équation se transforment de façon identique. Ainsi, la tâche principale, à savoir l'établissement de l'équation fondamentale du mouvement sous la forme qui se conserve lors de la transformation de Lorentz, c.-à-d. dans tout référentiel d'inertie, est accomplie. Cependant, on a dû modifier certaines définitions classiques et avant tout introduire une nouvelle définition de l'impulsion.

L'interprétation de l'équation quadridimensionnelle du mouvement s'est avérée simple. Ses trois composantes (premières) donnent l'équation du mouvement dans l'espace tridimensionnel. Par sa forme, cette équation est identique au principe fondamental classique:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}, \qquad (42)$$

mais la définition de l'impulsion relativiste $\boldsymbol{p} = m_0\gamma\boldsymbol{v}$ est autre que celle de la mécanique classique $\boldsymbol{p}_0 = m_0\boldsymbol{v}$.

La quatrième composante de (19) traduit le principe de la conservation de l'énergie. Mais l'expression de l'énergie (27) diffère notablement de son analogue prérelativiste. L'énergie d'un corps libre au repos (qui ne possède pas d'énergie potentielle) est nulle d'après la mécanique newtonienne, d'où découle de façon univoque la définition de l'énergie cinétique $T = \frac{mv^2}{2}$. L'énergie totale relativiste d'une particule libre se détermine comme $\mathscr{E} = m_0c^2\gamma$. Cette énergie est totale dans le sens qu'elle contient également l'énergie du corps au repos (celle-ci est égale à m_0c^2). Cependant, nous avons spécifié, compte tenu de (26), que l'expression de l'énergie n'est définie qu'à la constante près et, par conséquent, en la choisissant de façon convenable (posant $\mathscr{E}_0 = -m_0c^2$), on pourrait, tout comme en mécanique newtonienne, admettre que l'énergie du corps au repos soit nulle. Mais on ne peut procéder de la sorte en Relativité restreinte. En mécanique de la Relativité restreinte, il faut tenir compte des lois de transformation de diverses grandeurs et du principe de correspondance entre les mécaniques relativiste et classique (dans le cas limite, quand $\beta \to 0$, beaucoup de grandeurs des deux mécaniques coïncident). Il est connu que la transformation de Lorentz devient celle de Galilée pour les petites vitesses relatives des systèmes de référence ($\mathrm{B} \to 0$, $\Gamma \to 1$) ; les vitesses des particules étant faibles ($\beta \to 0$), l'impulsion tridimensionnelle relativiste se transforme en impulsion tridimensionnelle classique $m_0\gamma\boldsymbol{v} \to m_0\boldsymbol{v}$.

Supposons que nous ayons défini l'énergie totale d'une particule relativiste libre sous la forme $\mathscr{E} = m_0c^2\gamma + C$. Alors, dans le cas limite $\beta \to 0$, nous aurions eu $\mathscr{E} = m_0c^2 + C$. Envisageons maintenant la transformation des composantes de l'impulsion lorsqu'on passe d'un référentiel d'inertie à un autre. Dans le cas limite $\mathrm{B} \to 0$, $\beta \to 0$, la première équation de (34) entraînerait $m_0v'_x = m_0v_x - m_0V - \frac{V \cdot C}{c^2}$. Cette dernière égalité doit fournir la règle classique de la composition des vitesses $v'_x = v_x - V$. Il en est ainsi pour $C = 0$, ce qui vérifie la formule (27). Le fait que la mécanique newtonienne est incapable de mettre en évidence l'existence de l'énergie au repos a conduit à un choix incorrect de la constante additive et, partant, à l'échec du principe de correspondance entre les expressions classique et relativiste de l'énergie.

Maintenant, nous allons évaluer la contribution de l'équation relativiste du mouvement à la mécanique d'un point matériel en comparaison avec l'équation classique et, ensuite, nous passerons aux conséquences qui découlent de la définition relativiste de l'énergie d'une particule libre.

24. Equations relativistes du mouvement. Après avoir obtenu l'équation quadridimensionnelle du mouvement qui est juste du point de vue de la Relativité restreinte et établi qu'elle se définit pratiquement par ses trois premières composantes dans un seul référentiel, on procède directement aux opérations avec l'équation tridimensionnelle du mouvement, comme si son origine quadridimensionnelle n'existait pas. Le principe fondamental relativiste aura la forme

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F} \tag{43}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \boldsymbol{F}, \tag{44}$$

où les vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{F}$ ont une signification tridimensionnelle usuelle.

Nous avons vu que l'équation relativiste du mouvement se transforme en celle de Newton si $\gamma \sim 1$. Evidemment, la mécanique newtonienne n'est pas valable sous la condition $\gamma \gg 1$. Mais cette même condition, étant donné $\gamma = \frac{\mathscr{E}}{m_0c^2}$, s'ecrit autrement $\frac{\mathscr{E}}{m_0c^2} \gg 1$. Ainsi, l'équation relativiste du mouvement s'emploie nécessairement au cas où l'énergie de la particule dépasse sensiblement son énergie au repos.

En mécanique classique, la force $\boldsymbol{F}$ et l'accélération $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ coïncident en direction ; il n'en est pas ainsi pour la mécanique relativiste. En effet, développons le premier membre (43) compte tenu de (10). On obtient

$$m_0\gamma \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + m_0\gamma^3\beta\dot{\beta}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}. \tag{45}$$

L'égalité ci-dessus montre que si $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{F}$ ne sont pas parallèles, l'accélération et la force ne le sont non plus.

L'accélération ne coïncide en direction avec la force qu'en deux cas particuliers.

1) La force est parallèle à la vitesse à chaque instant donné. Introduisons le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ dont la direction à un instant donné se confond avec la direction commune de $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{v}$. Il s'ensuit que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{n}F$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}v$. Conformément à (45), $d\boldsymbol{v}$ est également dirigé suivant $\boldsymbol{n}$. Si l'accroissement de la vitesse suit la direction de $\boldsymbol{n}$ ou de $\boldsymbol{v}$, la direction de la vitesse reste invariable ; mais alors le vecteur $\boldsymbol{F}$ doit conserver, lui aussi, sa direction. Donc, $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unitaire constant. En portant dans l'équation (44) les

expressions pour la force et la vitesse proportionnelles au vecteur constant $\boldsymbol{n}$ et en simplifiant par $\boldsymbol{n}$ les deux membres, on est amené à l'équation scalaire :

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma v)=F. \tag{46}$$

Il est aisé de transformer le premier membre de (46) :

$$m_0\gamma\frac{dv}{dt}+m_0v\gamma^3\beta\dot{\beta}=m_0\gamma^3\frac{dv}{dt}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{v^2}{c^2}\right)=m_0\gamma^3\frac{dv}{dt}.$$

Dans ce cas, le coefficient de proportionnalité entre la force et l'accélération est égal à $m_0\gamma^3$.

2) La vitesse est constamment orthogonale à la force. Dans ce cas, comme il en résulte de (26), l'énergie de la particule $\mathscr{E}=m_0c^2\gamma$ ne varie pas et $\gamma=$ const. L'équation (43) aura donc la forme

$$m_0\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F},$$

et le coefficient de proportionnalité entre la force et l'accélération est égal à $m_0\gamma$.

Dans le cas général, l'équation du mouvement (44) se traduit par

$$m_0\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\boldsymbol{v}\frac{d}{dt}(m_0\gamma)=\boldsymbol{F}, \tag{47}$$

mais, vu que

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma)=\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(m_0c^2\gamma)=\frac{1}{c^2}\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}),$$

où lors des transformations on tient compte de (26) et (27), l'accélération tridimensionnelle $\boldsymbol{w}$ de (47) sera égale à :

$$\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{1}{m_0\gamma}\left\{\boldsymbol{F}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v})\right\}. \tag{48}$$

Dans la formule (48), le deuxième terme de l'accolade est proportionnel à β^2, c.-à-d. il représente une grandeur du second ordre de petitesse par rapport au premier terme selon β. Quand $\beta\to 0$, compte tenu de ce que $\gamma\to 1$ (également à β^2 près), on revient au principe fondamental classique.

On voit de (48) que si $v\to c$, l'expression de l'accolade se ramène à zéro, tandis que $\gamma\to\infty$. Ainsi, quand la vitesse de la particule s'approche de la vitesse de la lumière, la particule n'acquiert plus d'accélération, quelle que soit la force agissante.

Il est toujours possible de choisir un référentiel où la particule soit, à l'instant donné, au repos ($\beta=0$). Mais alors il résulte de (48) que pour ce référentiel ($\gamma=1$) est valable le principe fondamental classique (14). En transformant les deux membres du principe (14) conformément aux formules relativistes de la transformation de la 4-accélération et de la 4-force par rapport à un système de référence arbitraire, on est amené à (48).

Nous avons vu que si la force et la vitesse ont une direction commune, le coefficient de proportionnalité entre la force et l'accélération vaut $m_0\gamma^3$. Au cas où la force est normale à la vitesse, ce coefficient est égal à — $m_0\gamma$. C'est pourquoi dans de premiers ouvrages relativistes on trouve la notion de masse *longitudinale* (par rapport à la vitesse) $m_0\gamma^3$ et de masse *transversale* $m_0\gamma$. Ces termes ne sont plus employés. En parlant de la dépendance entre la masse du corps et la vitesse, on est obligé de comparer l'impulsion classique $m_0\boldsymbol{v}$ avec celle relativiste $m_0\gamma\boldsymbol{v}$. Il s'ensuit qu'en Mécanique relativiste la masse du corps dépend de la vitesse conformément à la loi :

$$m = m_0\gamma = m_0(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (49)$$

Pourtant, comme nous venons de constater dans les deux cas particuliers où la direction de l'accélération coïncide avec celle de la force, cette dépendance n'est valable que pour la force orthogonale à la vitesse.

Dans un système de référence où le corps est au repos ($\beta = 0$), la masse m est égale à m_0. Pour cette raison on appelle cette dernière masse au repos. La masse m du corps définie selon (49) se nomme parfois masse *relativiste* du corps. La seule masse qui fait l'objet de notre analyse est la masse au repos qui est invariante.

L'expérience, confirme-t-elle l'équation relativiste du mouvement (43) et la dépendance entre la masse relativiste et la vitesse? Rappelons d'abord que la loi classique ne se montra pas partout efficace en 1902, trois ans avant la création de la Relativité restreinte. Les écarts de cette loi furent observés lors du mouvement des électrons rapides. Il existe à présent la preuve parfaite de la justesse des lois mécaniques relativistes. La plupart des cyclotrons communiquant aux particules élémentaires les vitesses de l'ordre de la vitesse de la lumière, ainsi que tous les calculs des accélérateurs, sont basés sur la mécanique relativiste. La technique remarquablement développée des cyclotrons a pour base la mécanique relativiste et fournit une belle preuve de la validité de cette théorie et de l'équation (43) en particulier.

La relation (49) ne découle point de la mécanique relativiste. L'équivalence de tous les référentiels d'inertie aussi bien que l'invariance de la vitesse de la lumière nous amènent seulement à (43). Dans notre exposé, le passage à (49) est plutôt une interprétation du résultat qu'une conclusion. Mais (49) a un sens physique concret. En aucun cas la vitesse du corps n'est supérieure à celle de la lumière ; si les vitesses s'approchent de cette dernière, la force ne peut pratiquement communiquer au corps aucune accélération et il s'agit alors de l'accroissement de la masse.

La variation de la masse en fonction de la vitesse s'avère nettement claire si l'on lie la masse relativiste m et celle au repos m_0, d'un côté, avec l'énergie au repos $\mathscr{E}_0 = m_0c^2$ et l'énergie relativiste $\mathscr{E} = m_0c^2\gamma$ de la particule, de l'autre. Donc,

$$\frac{\mathscr{E}_0}{m_0} = \frac{\mathscr{E}}{m} = c^2 = \text{const.}$$

On voit que l'accroissement de l'énergie du corps amène l'accroissement de son inertie, donc l'augmentation de la masse. Au paragraphe suivant, nous définissons l'énergie cinétique relativiste T de la particule comme une partie de l'énergie totale, qui est égale à zéro chez la particule au repos. Il existe une relation simple entre l'accroissement de la masse aux dépens du mouvement et l'énergie cinétique:

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{T}{c^2} .$$

Donc, l'augmentation de la masse est proportionnelle à l'accroissement de l'énergie cinétique relativiste (voir le paragraphe 25).

Le problème de la masse du corps en mouvement peut être abordé de façon différente en profitant du lien qui existe entre la masse et l'énergie $m = \frac{\mathscr{E}}{c^2}$. L'impulsion d'une particule $p = m_0\gamma v$ et son énergie $\mathscr{E} = m_0c^2\gamma$, comme nous avons déjà mentionné, forment le quadrivecteur énergie-impulsion. Soient p et $\mathscr{E}$ dans le référentiel K. La quantité d'énergie pour K' s'obtient selon (34):

$$\mathscr{E}' = \Gamma(\mathscr{E} - Vp_x) = \Gamma(m_0\gamma c^2 - Vm_0\gamma v_x) =$$
$$= m_0c^2\gamma\Gamma\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right) = m_0c^2\gamma',$$

où la dernière égalité s'écrit conformément à (9). Comme $\frac{\mathscr{E}'}{c^2} = m$, on arrive (avec une légère différence des notations) à la relation (49). Ce raisonnement témoigne, en particulier, du fait que la masse d'une particule dans un certain référentiel K' dépend de sa masse et de son impulsion dans tout autre système de référence K.

Il existe une opinion que la relation (49) entre la masse et la vitesse fut mise en évidence par l'expérience de pensée proposée par Tolman. Envisageons ses raisonnements sous forme la plus élémentaire. Etudions un choc mou de deux particules dont les propriétés sont identiques (leurs masses dépendent de la même façon de leurs vitesses). Par souci de simplicité, supposons qu'elles voyagent suivant les axes confondus des x et x' de deux référentiels K et K', dont nous aurons besoin dans la suite. Supposons que ces particules se meuvent dans K en sens inverses et avec les vitesses w_1 et w_2 (il s'agit évidemment de la vitesse tridimensionnelle usuelle). En tant que K', on choisit un système se mouvant avec la vitesse égale à celle du centre d'inertie des particules. Dans K', avant le choc, les particules se rapprochent aux vitesses égales à v_1' et v_2' telles que $v_1' = v'$ et $v_2' = -v'$.

Après le choc, les particules forment un système qui se déplace tout entier avec la vitesse V du centre des masses. Désignons par M la masse de ce système.

Postulons que pour tous les référentiels d'inertie sont valables les principes de la conservation de la masse (qui dépend de la vitesse) et de l'impulsion (ce dernier principe est déterminé formellement comme dans la théorie classique; on sous-entend tout de même que la masse dépend de la vitesse). Ainsi, on aura pour le système K:

$$m(w_1) + m(w_2) = M(V), \tag{a}$$

$$m(w_1)\, w_1 + m(w_2)\, w_2 = M(V)\, V, \tag{b}$$

où $m(w)$ est la fonction identique pour les deux particules; quant à $M(V)$, elle peut différer de $m(w)$. Portant (a) dans (b), on aboutit à la relation

$$\frac{m(w_1)}{m(w_2)} = -\frac{w_2 - V}{w_1 - V}. \tag{c}$$

Utilisons maintenant les formules relativistes de transformation de la vitesse (III, 8):

$$w_1 = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'}{c^2} V}, \quad w_2 = \frac{-v' + V}{1 - \frac{v'}{c^2} V}, \tag{d}$$

alors

$$w_2 - V = -\frac{v'\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v'V}{c^2}}, \quad w_1 - V = \frac{v'\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{v'V}{c^2}}.$$

d'où (c) se présentera sous la forme

$$\frac{m(w_1)}{m(w_2)} = \frac{1 + \frac{v'V}{c^2}}{1 - \frac{v'V}{c^2}}. \tag{e}$$

Afin de transformer cette dernière formule, il faut employer la formule (9) en la récrivant une fois pour w_1 (γ est désigné par $\gamma(w_1)$) et la seconde fois pour w_2 (et $\gamma(w_2)$); la valeur de γ' qui est définie par la valeur absolue de v' demeure invariable. On obtient

$$\frac{\gamma(w_1)}{\gamma'} = \Gamma\left(1 + \frac{V}{c^2} v'\right), \quad \frac{\gamma(w_2)}{\gamma'} = \Gamma\left(1 - \frac{V}{c^2} v'\right).$$

Ces deux relations permettent de transformer le second membre (e) qui sera de la forme

$$\frac{m(w_1)}{m(w_2)} = \frac{\gamma(w_1)}{\gamma(w_2)} \equiv \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{w_2}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{w_1}{c}\right)^2}}.$$

On a obtenu une relation fonctionnelle pour $m(w)$. Elle peut être vérifiée en posant

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{c}\right)^2}},$$

ce qui correspond à (49).

Ce résultat seul, n'est-il pas suffisant pour démontrer « la dépendance entre la masse et la vitesse » ? La relation (a) est le principe relativiste de la conservation de l'énergie (si l'on multiplie les deux membres de l'égalité par c^2). La relation (b) est le principe de la conservation de l'impulsion où l'expression de cette dernière est implicite. Ensuite, on a utilisé la loi relativiste de la composition des vitesses qui est une conséquence directe de la cinématique relativiste. On obtient finalement, et cela ne pourrait être autrement, l'expression correcte de l'impulsion relativiste de la particule, ce qui représente le point de départ de notre raisonnement. La conclusion de Tolman ne peut donc être considérée comme une démonstration indépendante de (49).

Des corrections qu'apporte la mécanique relativiste dans la solution de certains problèmes concrets sont les mieux suivies sur des exemples cités dans le paragraphe 30.

25. Energie relativiste. En mécanique relativiste l'expression de l'énergie d'une particule diffère sensiblement de celle classique. Il est remarquable que cette expression conduit à l'énergie au repos, notion totalement étrangère aux concepts classiques. En effet, l'énergie totale d'une particule libre est donnée par la formule

$$\mathscr{E} = m_0 c^2 \gamma = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (50)$$

Cette énergie ne s'annule pas même si la vitesse du corps est égale à zéro ($\gamma = 1$ lorsque $v = 0$). Dans le référentiel où elle est au repos, la particule libre possède l'énergie égale à $m_0 c^2$ et appelée *énergie au repos* $\mathscr{E}_0$. Jusqu'ici, on considérait la particule sans préciser son caractère élémentaire. C'est pourquoi toutes les formules obtenues sont valables pour tout corps formé de plusieurs constituants. Il est donc logique que m_0 est la masse totale du corps et v la vitesse de mouvement du corps tout entier. La formule $\mathscr{E}_0 = m_0 c^2$ peut être appliquée à tout corps qui est tout entier au repos. Ainsi donc, la masse au repos du corps définit l'énergie totale de celui-ci quelle que soit la nature de cette énergie.

En mécanique classique, l'énergie d'un corps au repos peut être aussi bien positive que négative, car elle est définie à une constante près. Quant à l'énergie relativiste du corps libre (énergie de tout système matériel isolé), elle est toujours positive et liée à la masse au repos, celle-ci déterminant l'énergie d'un corps immobile. La masse relativiste définit, d'une part, l'énergie d'un mobile et, d'autre part, l'inertie du corps. Par voie de conséquence, l'inertie est la mesure de l'énergie du corps. Toute variation de $\Delta \mathscr{E}$ de l'énergie du corps entraîne celle de $\Delta m = \frac{\Delta \mathscr{E}}{c^2}$ de la masse de ce corps.

Il se pose alors la question suivante: comment a pu passer inaperçue une telle énergie gigantesque qu'est l'énergie au repos de n'importe quel corps ? Remarquons qu'un gramme de substance contient $\sim 10^{21}$ erg. L'essentiel réside

non pas dans l'énergie totale retenue par le corps mais dans cette partie de l'énergie qu'on peut utiliser. Bien que toute masse contienne une énorme énergie, celle-ci n'est pas facile à réaliser. La mise en service de l'énergie atomique ne remonte qu'à une époque très récente. Avant ce moment, l'énergie au repos ne se manifestait pas (la masse était toujours conservée), puisque sa réalisation n'est décelée que par sa variation.

c^2 étant très grand, la masse change très peu avec la variation de l'énergie d'un corps et dans la plupart des cas il est impossible de le déceler expérimentalement même par la pesée qui est un procédé de mesure des plus précis. Citons, à titre d'exemple, qu'une augmentation de température de 100 °C de la masse d'eau d'un kilogramme ne fait changer la masse d'eau que de $5 \cdot 10^{-9}$ g.

Une valeur tellement insignifiante échappe à la limite de possibilité des balances les plus perfectionnées. Mais la variation de masse des noyaux lors de la transmutation est sensible. Plus encore, l'énergie de cohésion ne se définit que par le défaut de masse (voir plus loin).

La proportionnalité entre la masse et l'énergie, et même leur égalité pour un choix convenable des unités ($c = 1$), entraîne une conséquence fondamentale. La mécanique relativiste remplace les deux principes de la mécanique classique — conservation de la masse et conservation de l'énergie — par le principe unique autonome. Notons tout de même qu'en mécanique relativiste le principe de la conservation de la masse entend par celle-ci la masse relativiste. La masse au repos ne se conserve plus (voir le paragraphe 57).

L'expression classique de l'énergie cinétique n'est plus correcte (sauf le cas limite des faibles vitesses). En mécanique relativiste, on définit l'énergie cinétique comme une partie de l'énergie de la particule, qui devient nulle lorsque $v = 0$. On l'obtient en soustrayant l'énergie au repos de l'énergie totale:

$$T = \mathscr{E} - m_0c^2 = m_0c^2 (\gamma - 1). \tag{51}$$

On arrive au même résultat en calculant le travail de la force conformément à l'équation de la dynamique relativiste:

$$dT = \boldsymbol{Fv}\, dt = vd\,(m_0\gamma v) = m_0\gamma v\, dv + m_0 v^2\, d\gamma =$$
$$= m_0\gamma v\, dv + m_0 v\gamma^3\beta^2\, d\beta = m_0\gamma^3 v\, dv \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0\gamma^3 v\, dv,$$

d'où

$$T = m_0 \int \gamma^3 v\, dv = m_0c^2\gamma + \text{const}.$$

Si $T = 0$ pour $v = 0$ (c.-à-d. pour $\gamma = 1$), alors const $= -m_0c^2$, d'où $T = m_0c^2 (\gamma - 1)$.

Trouvons les conditions sous lesquelles l'expression (51) se transforme en expression de l'énergie cinétique classique. En déve-

loppant γ en une série

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots, \qquad (52)$$

nous voyons que

$$T = \frac{m_0 v^2}{2} + m_0 \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \ldots,$$

c.-à-d. que l'énergie cinétique classique a un sens tant que $\beta \ll 1$ et qu'on peut négliger le terme β^4.

Compte tenu de l'énergie au repos $\mathscr{E}_0 = m_0 c^2$, la formule (50) prend la forme suivante:

$$\mathscr{E} = \gamma \mathscr{E}_0. \qquad (53)$$

Il est à noter que $\mathscr{E}_0$ comprend toutes les formes d'énergie que le corps (ou système) possède. Selon (53), le passage du système propre (associé) à tout autre référentiel d'inertie s'accompagne de l'augmentation de γ fois de toutes les formes d'énergie. Il n'y avait rien de semblable dans la mécanique classique.

26. Défaut de masse. Soit un système de deux corps. L'énergie en est la somme de l'énergie de chaque corps et de l'énergie d'interaction de ces corps. Par exemple, l'énergie totale de deux billes métalliques chargées, suffisamment éloignées l'une de l'autre, est donnée par l'expression

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + W_{12}, \qquad (54)$$

où $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont les énergies propres des billes chargées (égales à $\frac{1}{8\pi\varepsilon}\frac{q^2}{a}$, q étant la charge de la bille, a son rayon), tandis que

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \qquad (55)$$

représente l'énergie de l'interaction des billes considérées comme charges ponctuelles.

Rappelons que l'énergie réciproque W_{12} d'un couple de charges est égale au travail mis en jeu lors de la formation du système. La valeur du potentiel créé par la charge q_1 au point 2 distant de r_{12} est proportionnelle à $\frac{q_1}{r_{12}}$; le travail effectué au cours du déplacement de q_2 de l'infini au point 2 est proportionnel à $\frac{q_2 q_1}{r_{12}}$. D'où la formule (55).

Le signe de W_{12} dépend de ceux des charges q_1 et q_2. Pour les charges de même signe qui se repoussent $W_{12} > 0$. Si les charges sont de signes contraires, on a $W_{12} < 0$. Dans ce dernier cas, le système est stable et seules les forces extérieures peuvent séparer

les billes. Comme entre la masse et l'énergie il existe la relation $\mathscr{E} = mc^2$, alors, en divisant par c^2 les deux membres de (54), on a

$$M = m_1 + m_2 + \frac{W_{12}}{c^2}, \tag{56}$$

où M est la masse du système, m_1 et m_2 les masses composantes du système. On devrait inclure dans les masses m_1, m_2, M leurs énergies au repos (sans tenir compte du champ électrique) mais cette introduction ne change en rien nos résultats.

D'après (56), la masse totale du système de deux particules peut être inférieure ou supérieure à la somme des masses des particules qui le composent. Si le système est stable, alors $W_{12} < 0$. Cette énergie d'interaction est appellée *énergie de cohésion*. Compte tenu de son signe, nous obtenons:

$$\Delta m = m_1 + m_2 - M = \frac{\mathscr{E}_c}{c^2}. \tag{57}$$

L'énergie de cohésion (divisée par c^2) est égale à la différence entre la somme des masses des corps composant le système et la masse totale de ce dernier. Cette différence, dite *défaut de masse*, multipliée par c^2, donne l'énergie de cohésion du système. La synthèse des noyaux atomiques à partir des protons et des neutrons fait apparaître entre ces particules (nucléons) des énergies de cohésion considérables. Donc, le défaut de masse du noyau (différence entre la masse totale de tous les nucléons formant le noyau et la masse réelle du noyau) est notable et peut être décelé. En fait, c'est d'après le défaut de masse qu'on trouve l'énergie de cohésion.

27. Désintégration des particules. Les expressions de l'énergie et de l'impulsion des particules nous suggèrent quelques idées sur la désintégration spontanée des particules ou des corps. Supposons qu'un corps, de masse au repos M, se scinde en deux parties dont les masses au repos sont m_1 et m_2. Dans le repère où le corps était au repos avant la désintégration, le principe de la conservation de l'énergie est fixé par la formule (sur les principes de la conservation voir paragraphe 28):

$$Mc^2 = \mathscr{E}_{10} + \mathscr{E}_{20}, \tag{58}$$

où $\mathscr{E}_{10}$ et $\mathscr{E}_{20}$ sont les énergies des particules fuyantes.

On a déjà vu que $\mathscr{E}_{10} > m_1c^2$ et $\mathscr{E}_{20} > m_2c^2$. Il en vient que la condition (58) n'est remplie que si $M > m_1 + m_2$. Ainsi donc, la désintégration spontanée n'est possible qu'au cas où la masse du corps est supérieure à la somme des masses des éclats. Si l'on a $M < m_1 + m_2$, le corps est stable; la désintégration spontanée en m_1 et m_2 est impossible. Pour amorcer la désintégration du corps, on a besoin d'un apport de l'énergie de l'extérieur en quantité

au moins égale à $(m_1 + m_2 - M)c^2$, c.-à-d. l'énergie de cohésion du corps.

Le principe de la conservation de l'impulsion doit être vérifié lors de la désintégration spontanée. Dans le système de référence propre, l'impulsion du corps est nulle. Donc, la somme des impulsions des éclats est aussi nulle:

$$\boldsymbol{p}_{10} + \boldsymbol{p}_{20} = 0,$$

ou

$$p_{10}^2 = p_{20}^2.$$

Comme $p^2 - \frac{\mathscr{E}^2}{c^2} = -m_0^2c^2$, nous obtenons

$$\mathscr{E}_{10}^2 - m_1^2c^4 = \mathscr{E}_{20}^2 - m_2^2c^4. \tag{59}$$

Les énergies des éclats sont tirées univoquement des formules (58) et (59):

$$\mathscr{E}_{10} = c^2 \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \qquad \mathscr{E}_{20} = c^2 \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}. \tag{60}$$

28. Principes de la conservation en Mécanique relativiste. Plus haut il était question des principes de la conservation de l'énergie et de l'impulsion d'un point matériel. Ici, nous arrêtons notre attention sur les principes valables pour le système de n corps matériels. Il faut y distinguer deux aspects. Premièrement, il est nécessaire d'analyser la forme des principes relativistes de la conservation dans le cadre d'un même référentiel. Deuxièmement, il est indispensable de connaître le comportement des grandeurs qui se conservent lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre. Ces deux problèmes sont manifestement résolus dans le cas d'un système des particules indépendantes et deviennent très compliqués pour un système des particules interdépendantes.

Commençons par le système de n particules indépendantes. Les équations du mouvement et de la variation de l'énergie pour le $k^{\text{ième}}$ corps ont la forme suivante [voir (23) et (26)]:

$$\frac{d\boldsymbol{p}^{(k)}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(k)}, \qquad \boldsymbol{p}^{(k)} = m_0^{(k)}\gamma^{(k)}\boldsymbol{v}^{(k)}, \tag{61}$$

$$\frac{d}{dt}(m_0^{(k)}c^2\gamma^{(k)}) = \boldsymbol{F}^{(k)}\boldsymbol{v}^{(k)} \quad \text{(pas de sommation sur } k\,!), \tag{62}$$

où $\boldsymbol{F}^k$ est la force appliquée au $k^{\text{ième}}$ corps.

Si l'on considère un corps isolé indépendant, alors $\boldsymbol{F}^{(\kappa)} = 0$ et (61) et (62) donnent directement les principes de la conservation de l'impulsion $\boldsymbol{p}^{(k)} =$ **const** et de l'énergie $\mathscr{E}^{(k)} = m_0^{(k)}\gamma^{(k)}c^2 =$ $=$ const. Au fond, pour un corps isolé cela se traduit effectivement par $\vec{P}^2 = p^2 - \frac{\mathscr{E}^2}{c^2} =$ const. Pour un seul corps représentant un

système isolé, $\vec{P}^2$ se conserve tant que p et $\frac{\mathscr{E}}{c}$ se conservent séparément, eux aussi. Notons en passant encore une fois que p et $i\frac{\mathscr{E}}{c}$ d'un corps forment le quadrivecteur.

La conservation de l'impulsion résultante $\sum p^{(k)}$, ainsi que de l'énergie totale $\sum \mathscr{E}^{(k)}$ du système de n points matériels indépendants, est évidente vu la conservation de chaque terme des sommes.

La loi de transformation de l'impulsion résultante et de l'énergie totale

$$\boldsymbol{P}=\sum \boldsymbol{p}^{(k)} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}=\sum \mathscr{E}^{(k)}$$

lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre est évidente, car au cas vectoriel la résultante se transforme comme ses composantes.

Le problème concernant les principes de la conservation se complique sensiblement pour le système de n particules interdépendantes. En mécanique classique, si les forces sont conservatives, l'interaction des particules peut être décrite par la fonction potentielle du système $U = (\boldsymbol{r}^{(1)}, \boldsymbol{r}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{r}^{(n)})$ où $\boldsymbol{r}^{(k)}(t)$ définit la position du $k^{\text{ième}}$ corps à l'instant t, et la position de toutes les n particules est considérée au même moment. La simultanéité est légitime, car elle se base sur l'hypothèse classique disant que les actions se propagent à la vitesse infinie.

La vitesse finie de la transmission de l'action en mécanique relativiste exige, dans le calcul de la force en un point donné, la connaissance des positions des particules à un certain moment précédent. Il est alors évident que la forme de la fonction relativiste U est loin d'être simple.

Présentons l'expression de l'énergie du système de n corps sous la forme

$$\mathscr{E}=\sum m_0^{(k)}c^2\gamma^{(k)} \tag{63}$$

et celle de l'impulsion résultante sous la forme

$$\boldsymbol{P}=\sum m_0^{(k)}\gamma^{(k)}\boldsymbol{v}^{(k)}. \tag{64}$$

Alors, on peut affirmer que les quantités $\boldsymbol{P}$ et $i\frac{\mathscr{E}}{c}$ ne forment plus le quadrivecteur à la différence du cas d'une particule isolée. En outre, ces quantités ne sont plus constantes. Il est clair que l'égalité $\mathscr{E}$ = const n'est plus vérifiée, car en mécanique classique se conserve l'énergie *totale* du système, y compris son énergie potentielle. Cette dernière ne figure pas dans la formule (63), car son introduction stricte est bien compliquée. La dépendance de (64) du temps est aussi une conséquence de la vitesse finie de la transmission de l'action. Aussi cette circonstance explique-t-elle le fait paradoxal

que les quantités $\mathscr{E}$ et $\boldsymbol{P}$, qui représentent la somme des composantes des quadrivecteurs, ne sont pas des composantes du quadrivecteur. En effet, dans tout référentiel d'inertie où l'on compose les sommes (63) et (64), leurs termes sont simultanés du point de vue du système considéré. En passant d'un référentiel d'inertie à un autre, il est possible de trouver, par application de la loi de transformation des quadrivecteurs, les valeurs de l'impulsion et de l'énergie des particules isolées et ensuite d'en faire la somme. Mais, dans un nouveau référentiel, les événements transformés ne sont plus simultanés. Pour trouver $\mathscr{E}$ et $\boldsymbol{P}$ dans le nouveau système, il faut alors rendre simultanées ces sommes par rapport à ce système. C'est bien cette nivélation du temps qui ne permet plus aux quantités $\mathscr{E}$ et $\boldsymbol{P}$ d'être les composantes du quadrivecteur.

S'il y a interaction, les systèmes relativistes possèdent dix intégrales: d'énergie, d'impulsion, de mouvement, de centre d'inertie, de moment cinétique, etc. Ces intégrales sous forme approchée sont représentées dans l'ouvrage de Fock, *The theory of space, time and gravitation* (traduit du russe), Pergamon press, 1959.

Lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre, en certaine approximation $\left(\beta^{(k)} = \frac{v(k)}{c} \ll 1\right)$ où se conservent encore les termes $(\beta^{(k)})^2$, les intégrales de mouvement telles que l'énergie et l'impulsion représentent le quadrivecteur, tandis que les intégrales de centre d'inertie et de moment cinétique forment le tenseur antisymétrique. Alors, il est clair que si ces intégrales se conservent dans un système de référence, alors elles seront constantes dans n'importe quel autre système.

Voici un exemple où les principes de la conservation de l'impulsion et de l'énergie s'écrivent sous une forme simple:

$$\sum m_0^{(k)}\gamma^{(k)}\boldsymbol{v}^{(k)} = \sum m_0^{(k)}\gamma'^{(k)}\boldsymbol{v}'^{(k)}, \tag{65}$$

$$\sum m_0^{(k)}c^2\gamma^{(k)} = \sum m_0^{(k)}c^2\gamma'^{(k)}. \tag{66}$$

Ces formules sont valables quand il s'agit des particules rapides mais d'interaction faible (ou de courte durée). Les formules (65) et (66) sont incorrectes au moment même de l'interaction mais donnent des résultats satisfaisants avant et après l'interaction, appliquées, en particulier, au gaz parfait relativiste.

29. Quadritenseur du moment cinétique, quadritenseur du moment d'une force et leur transformation. Dans l'espace tridimensionnel le moment cinétique $\boldsymbol{M}$ d'un point est défini comme le produit vectoriel:

$$\boldsymbol{M}^{(k)} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}. \tag{67}$$

Ici, le vecteur $\boldsymbol{r}$ est pris par rapport à un point arbitraire et $\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{v}$. Dans l'espace tridimensionnel le produit vectoriel repré-

sente le vecteur dual au tenseur antisymétrique du deuxième ordre (voir Appendice, 6) à trois composantes réelles. Ce tenseur possède les composantes suivantes:

$$M^{(k)}_{\beta\gamma} = x_\beta p_\gamma - x_\gamma p_\beta. \tag{68}$$

La relation entre le vecteur $\boldsymbol{M}^{(k)}$ et le tenseur $M^{(k)}_{\beta\gamma}$ est donnée par la formule

$$M^{(k)}_\alpha = e_{\alpha\beta\rho} M^{(k)}_{\beta\gamma}, \tag{69}$$

où $e_{\alpha\beta\rho}$ est le pseudo-tenseur complètement antisymétrique du troisième ordre (voir Appendice, 6). La définition (69) conduit à:

$$M_x = M_{yz} = -M_{zy}, \quad M_y = M_{zx} = -M_{xz}, \quad M_z = M_{xy} = -M_{yx}. \tag{70}$$

La généralisation naturelle du tenseur tridimensionnel du moment (68) est un tenseur quadridimensionnel du moment, dont l'expression pour une particule est:

$$M_{ik} = x_i p_k - x_k p_i, \tag{71}$$

où les composantes du quadrirayon vecteur et de la 4-impulsion sont, comme d'habitude, traduites par les formules:

$$\vec{R}\,(\boldsymbol{r},\ ict), \quad \vec{P}\left(\boldsymbol{p},\ \frac{i}{c}\mathscr{E}\right). \tag{72}$$

Il en vient avec évidence que les composantes spatiales (i, k = =1, 2, 3) du tenseur (71) coïncident, à facteur γ près, avec le moment cinétique classique (68). Donnons maintenant l'interprétation des composantes $M_{4\alpha}$. De (65) et (66) découle:

$$M_{4\alpha} = ic\left(tp_\alpha - \frac{\mathscr{E}}{c^2}x_\alpha\right).$$

Il s'ensuit que les composantes M_{41}, M_{42}, M_{43} forment le vecteur tridimensionnel

$$ic\left(t\boldsymbol{p} - \frac{\mathscr{E}}{c^2}\boldsymbol{r}\right). \tag{73}$$

Voici les composantes du *quadritenseur du moment cinétique* du système (74):

$$M_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma M^{(k)}_z & -\gamma M^{(k)}_y & -ic\left(tp_x - \frac{\mathscr{E}}{c^2}x\right) \\ -\gamma M^{(k)}_z & 0 & \gamma M^{(k)}_x & -ic\left(tp_y - \frac{\mathscr{E}}{c^2}y\right) \\ \gamma M^{(k)}_z & -\gamma M^{(k)}_x & 0 & -ic\left(tp_z - \frac{\mathscr{E}}{c^2}z\right) \\ ic\left(tp_x - \frac{\mathscr{E}}{c^2}x\right) & ic\left(tp_y - \frac{\mathscr{E}}{c^2}y\right) & ic\left(tp_z - \frac{\mathscr{E}}{c^2}z\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Le moment cinétique d'un système des particules indépendantes est la somme des composantes des moments cinétiques de tous les points constituant le système. L'isotropie de l'espace et du temps laisse invariable le tenseur M_{ik} d'un système isolé (voir Landau et Lifchitz, *Théorie des champs*, Editions Mir) ; cela veut dire que toutes les composantes de M_{ik} se conservent. En particulier, l'égalité suivante

$$\sum \left(t\boldsymbol{p} - \frac{\mathscr{E}}{c^2}\boldsymbol{r}\right) = \text{const} \tag{75}$$

est vraie.

Comme l'énergie du système isolé demeure constante ($\sum \mathscr{E} =$ $=$ const), on peut écrire au lieu de (75), en divisant ses deux membres par $\sum \mathscr{E}$, une autre égalité :

$$\frac{\sum \mathscr{E}\boldsymbol{r}}{\sum \mathscr{E}} - \frac{c^2 \sum \boldsymbol{p}}{\sum \mathscr{E}} t = \text{const.} \tag{76}$$

D'après (76), le point fixé par le rayon vecteur

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum \mathscr{E}\boldsymbol{r}}{\sum \mathscr{E}} \tag{77}$$

se meut uniformément à la vitesse

$$\boldsymbol{V} = \frac{c^2 \sum \boldsymbol{p}}{\sum \mathscr{E}}. \tag{78}$$

Cela n'est autre que la vitesse du système tout entier. La formule (78) correspond parfaitement à l'expression $\boldsymbol{p} = \frac{\mathscr{E}}{c^2}\boldsymbol{v}$, puisque $\sum \boldsymbol{p}$ est l'impulsion résultante du système, tandis que $\sum \mathscr{E}$ est son énergie totale. La formule (77) donne la définition relativiste des coordonnées du centre d'inertie du système. Aux faibles vitesses des particules du système, $\mathscr{E} \approx mc^2$, et (77) est remplacée par

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum m\boldsymbol{r}}{\sum m}.$$

Il est important de noter que la formule (77) n'a trait qu'au système des particules indépendantes. Au paragraphe 28, on a expliqué la cause des complications surgissant lors de l'analyse relativiste du système des particules interdépendantes.

Soit $\boldsymbol{M}$ le moment cinétique tridimensionnel dans le repère K où le corps (ou système de particules), considéré comme un tout, est au repos, c.-à-d. dans le système tel que $\sum \boldsymbol{p} = 0$. Nous nous intéressons au moment cinétique $\boldsymbol{M}'$ du même ensemble de particu-

les par rapport au centre d'inertie se déplaçant avec la vitesse relative $\boldsymbol{V}$ dans le repère K'. Trouvons donc les formules de transformation de $\boldsymbol{M}$. Les composantes de $\boldsymbol{M}$ étant les composantes spatiales du tenseur des moments M_{ik}, leur transformation se fait d'après les mêmes formules générales:

$$M_{12}=\Gamma(M'_{12}-iBM_{42}),\quad M_{13}=\Gamma(M'_{13}-iBM_{43}),\quad M_{23}=M'_{23}.$$

Mais l'origine du repère K' se confondant avec le centre d'inertie, on a

$$\sum \mathscr{E}y=\sum \mathscr{E}z=0.$$

La vitesse V étant prise pour l'axe des x, on obtient $\sum p_y=\sum p_z=0$. Par suite, $M_{4y}=M_{4z}=0$, ce qui donne immédiatement:

$$M'_x=M_x,\quad M'_y=M_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}},\quad M'_z=M_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{79}$$

Le module de $\boldsymbol{M}$ a pour expression:

$$M'^2=M^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)+\frac{V^2}{c^2}M_x^2. \tag{80}$$

On aura besoin encore de la généralisation quadridimensionnelle du moment de force. Quant à l'espace tridimensionnel, celui-ci y est défini par le produit vectoriel:

$$\boldsymbol{L}^{(h)}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}. \tag{81}$$

Par analogie avec (65), il est naturel de prendre pour la généralisation quadridimensionnelle du moment de force le tenseur antisymétrique:

$$L_{ik}=x_i\mathfrak{F}_k-x_k\mathfrak{F}_i, \tag{82}$$

où $\vec{R}\,(\boldsymbol{r}, ict)$ et $\vec{F}\left(\gamma\boldsymbol{F}, \frac{i}{c}\gamma\,(\boldsymbol{Fv})\right)$. Il devient clair, grâce aux composantes des quadrivecteurs $\vec{R}$ et $\vec{F}$, que les composantes spatiales de (82) coïncident avec l'expression classique du moment de force (81) à γ près:

$$L_{\beta\rho}=\gamma L_{\beta\rho}^{(h)}. \tag{83}$$

On tire facilement de la formule (82) les composantes $L_{4\alpha}$:

$$L_{4\alpha}=i\gamma c\left(tF_\alpha-\frac{\boldsymbol{Fv}}{c^2}x_\alpha\right). \tag{84}$$

Ecrivons la matrice du tenseur du moment de force

$$L_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & \gamma L_z^{(h)} & -\gamma L_y^{(h)} & -i\gamma c\left(tF_x-\frac{Fv}{c^2}x\right) \\ -\gamma L_z^{(h)} & 0 & \gamma L_x^{(h)} & -i\gamma c\left(tF_y-\frac{Fv}{c^2}y\right) \\ \gamma L_y^{(h)} & -\gamma L_x^{(h)} & 0 & -i\gamma c\left(tF_z-\frac{Fv}{c^2}z\right) \\ i\gamma c\left(tF_x-\frac{Fv}{c^2}x\right) & i\gamma c\left(tF_y-\frac{Fv}{c^2}y\right) & i\gamma c\left(tF_z-\frac{Fv}{c^2}z\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{85}$$

La transformation des L_{ik} lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre se fait d'après les formules générales de transformation des composantes tensorielles.

Ecrivons enfin la généralisation relativiste quadridimensionnelle de l'équation classique de la variation du moment cinétique. Si la mécanique newtonienne donne

$$\frac{d\boldsymbol{M}^{(h)}}{dt}=\boldsymbol{L}^{(h)}, \tag{86}$$

l'équation généralisée se met alors sous la forme:

$$\frac{dM_{ik}}{d\tau}=L_{ik}. \tag{87}$$

Les composantes spatiales de (87), définissant trois équations, correspondent (à γ près) à l'équation classique (86) en se transformant en cette dernière au cas non relativiste ($\gamma\sim 1$). Les composantes temporelles (87) représentent les identités et, par conséquent, n'apportent rien de nouveau.

30. Quelques problèmes de la mécanique du point matériel. L'équivalence de tous les référentiels d'inertie impose la modification de l'équation du mouvement d'une particule. En restant dans le cadre d'un référentiel d'inertie donné, tous les changements relativistes se réduisent au remplacement de l'équation (14) par (43). Pour mieux comprendre des innovations apportées par l'équation relativiste (43) envisageons quelques problèmes en les résolvant parallèlement à base des équations du mouvement classique et relativiste. Chaque problème a son propre numérotage des formules.

Le mouvement rectiligne uniformément accéléré d'une particule. Dans le repère K', la particule se déplace le long de l'axe des x' de façon que $v'_y = v'_z = 0$. En faisant appel aux formules de transformation de composantes des vecteurs vitesse, on voit que, dans K, on a également $v_y = v_z = 0$. Si l'accé-

lération de la particule reste invariable, alors, dans un repère où elle est au repos (son propre repère), les composantes de l'accélération sont (w_0, 0, 0, 0). La grandeur w_0 est une accélération tridimensionnelle usuelle dirigée le long de l'axe des x'. La condition relativiste de l'invariance de l'accélération constante consiste en ce que, dans tout repère, on a

$$\left(\frac{du_i}{d\tau}\right)^2 = w_0^2, \tag{1}$$

où le deuxième membre représente la valeur de l'accélération dans son « propre » système de référence ($v_x = v_y = v_z = 0$). Mais dans tout référentiel la quadrivitesse de la particule a pour composantes

$$\vec{V}\,(u_1 = \gamma v_x,\ 0,\ 0,\ ic\gamma),$$

et les équations du mouvement (19) montrent que les composantes de la quadriforce sont $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3 = 0$. Par conséquent, dans un référentiel arbitraire, il reste deux équations

$$m_0 \frac{du_1}{d\tau} = \gamma F, \quad m_0 \frac{du_4}{d\tau} = \frac{i}{c}\gamma (Fv).$$

Pour simplifier l'écriture, on a désigné $F_x = F$ et $v_x = v$. La condition (1) aura maintenant la forme

$$\left(\frac{du_i}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{m_0^2}\left(\gamma^2 F^2 - \frac{1}{c^2}\gamma^2 F^2 v^2\right) = \frac{F^2}{m_0^2} = w_0^2 = \text{const.}$$

La conclusion en est que, dans les deux cas, classique et relativiste, le mouvement uniformément accéléré s'effectue sous l'action de la force constante $F = m_0 w_0$. L'équation du mouvement s'écrira alors

$$\frac{du_1}{d\tau} = \gamma w_0 \quad \text{ou} \quad \frac{du_1}{dt} = w_0.$$

En désignations tridimensionnelles

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = w_0 \quad \text{ou} \quad \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = w_0 t + C. \tag{2}$$

Evidemment, le même résultat s'obtient immédiatement si l'on porte la force constante $F = m_0 w_0$ dans l'équation relativiste du mouvement, d'où l'on voit immédiatement que w_0 est l'accélération classique.

Si les conditions initiales sont telles que pour $t = 0$ la vitesse v est nulle, alors $C = 0$, et en exprimant la vitesse par w_0, on obtient selon (2)

$$v = \frac{w_0 t}{\sqrt{1+\frac{w_0^2 t^2}{c^2}}} = \frac{v_{\text{cl}}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_{\text{cl}}}{c}\right)^2}}, \quad v = \frac{dx}{dt}, \tag{3}$$

où est introduite la désignation $v_{cl} = w_0 t$. En intégrant la dernière relation sous les conditions initiales $x = 0$, $t = 0$, on aboutit à l'expression

$$x = \frac{c^2}{w_0}\left(\sqrt{1+\left(\frac{v_{cl}}{c}\right)^2} - 1\right). \qquad (4)$$

La solution traditionnelle correspond à la force constante et, comme on sait, a la forme suivante (pour les mêmes conditions initiales) :

$$v_{cl} = w_0 t, \qquad x = \frac{w_0 t^2}{2}.$$

Si la vitesse classique s'accroît infiniment avec le temps, alors, en vertu de l'inégalité évidente,

$$\frac{x}{\sqrt{A+\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{x}{\sqrt{Aa^2+x^2}}\, a < a, \quad \text{si} \quad A > 0.$$

Il résulte de (3) que la vitesse relativiste est toujours inférieure à c, ce qui est en accord parfait avec le principe de la vitesse limite de la propagation des signaux. Si $\frac{v_{cl}}{c} \ll 1$, les expressions relativistes (3) et (4) de la vitesse v et de la coordonnée x se transforment en celles classiques.

Calculons le temps propre de la particule uniformément accélérée. La différentielle du temps propre est

$$d\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt.$$

En choisissant l'origine commune de référence de temps $t = \tau = 0$, on a

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt = \int_0^t \sqrt{1-\frac{w_0^2 t^2/c^2}{1+\frac{w_0^2 t^2}{c^2}}}\, dt =$$

$$= \frac{c}{w_0}\operatorname{Arcsh}\frac{w_0 t}{c} = \frac{c}{w_0}\ln\left(\frac{w_0 t}{c} + \sqrt{1+\frac{w_0^2 t^2}{c^2}}\right).$$

Lorsque $t \to \infty$, en négligeant, sous la racine, l'unité par rapport à $\frac{w_0 t}{c}$, on obtient

$$\tau \sim \frac{c}{w_0}\ln\frac{2 w_0 t}{c}.$$

Nous voyons que le temps propre d'un corps uniformément accéléré s'accroît beaucoup plus lentement que celui au sein du système de référence « immobile » par rapport auquel le corps est en mouvement.

Ayant quitté la Terre, le voyageur en espace, qui se meut avec une accélération constante, se voit plus jeune que ses jumeaux terrestres.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme. Posons les conditions initiales suivantes : à l'instant $t = 0$, les coordonnées de la particule chargée sont $x_0 = y_0 = 0$, sa vitesse $\boldsymbol{v}_0$ étant perpendiculaire au champ $\boldsymbol{E}$. Ces conditions correspondent au problème sur la particule qui entre dans le condensateur chargé parallèlement à ses armatures (fig. 14). Dirigeons l'axe des x suivant $\boldsymbol{E}$ et l'axe des y suivant $\boldsymbol{v}_0$. Alors, la particule se déplacera dans le plan (x, y). Jusqu'à ce que cela soit possible, nous ne séparerons pas les équations du mouvement classique et relativiste en les écrivant sous une forme unique

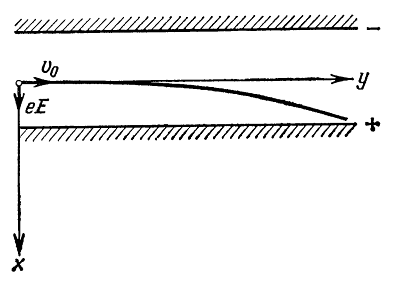


Fig. 14. Electron entrant dans le champ électrostatique uniforme du condensateur. A l'instant $t = 0$, l'électron se trouve à l'origine des coordonnées. Du côté du champ, la force est dirigée suivant l'axe des x, la vitesse initiale v_0 de l'electron suit l'axe des y. La solution classique du problème est la même que pour le problème du mouvement d'un point pesant lancé horizontalement avec la vitesse v_0 dans le champ de gravitation.

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{E},$$

où $\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}$ est la force qui agit sur la particule chargée de la part du champ électrique. En composantes,

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0.$$

D'où l'on obtient l'impulsion en intégrant

$$p_x = eEt + p_{0x}, \; p_y = p_{0y}.$$

Mais d'après les conditions initiales relativistes et classiques, si $t = 0$, alors $p_x = 0$ et $p_y = p_0$. Par conséquent, on peut écrire

$$p_x = eEt, \qquad p_y = p_0.$$

Maintenant il faut prendre en considération la différence existant entre les définitions de l'impulsion :

classique

$$\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{v}.$$

On a

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{eEt}{m_0}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0. \qquad (1)$$

Par intégration on obtient

$$x = \frac{eE}{m_0}\frac{t^2}{2} + x_0, \quad y = v_0 t + y_0.$$

relativiste

$$\boldsymbol{p} = m_0\gamma\boldsymbol{v}.$$

Dans ce cas

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 = (eEt)^2 + p_0^2.$$

L'équation pour l'énergie de la particule est

$$\mathscr{E} = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} = \sqrt{m_0^2c^4 + p_0^2c^2 + (ceEt)^2} = \sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}$$

Mais si $t=0$, alors $x_0=y_0=0$ d'après les conditions initiales. On a finalement

$$x=\frac{eE}{m_0}\frac{t^2}{2}, \quad y=v_0 t. \qquad (*)$$

La vitesse de la particule

$$v^2=v_x^2+v_y^2=\left(\frac{eE}{m_0}\right)^2 t^2+v_0^2$$

s'accroît infiniment avec le temps. La trajectoire de la particule, obtenue par suite de l'élimination du temps t de (*), est une parabole

$$x=\frac{eE}{2m_0v_0^2}\,y^2.$$

Faisant appel à la relation

$$\boldsymbol{v}^{(r)}=\frac{c^2}{\mathscr{E}}\,\boldsymbol{p}, \qquad (1')$$

on obtient

$$v_x^{(r)}=\frac{dx}{dt}=\frac{p_x c^2}{\mathscr{E}}=$$
$$=\frac{c^2eEt}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}}=$$
$$=\frac{v_x}{\sqrt{\left(\frac{\mathscr{E}_0}{m_0c^2}\right)^2+\left(\frac{v_x}{c}\right)^2}}, \qquad (2')$$

où v_x se détermine selon (1'). De (2') découle, comme au paragraphe précédent, que $v^{(r)}$ est toujours inférieure à c, car

$$v_y^{(r)}=\frac{dy}{dt}=\frac{p_0c^2}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}} \qquad (3')$$

diminue obligatoirement avec le temps. Il est facile d'intégrer l'équation (2')

$$x=\frac{1}{eE}\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}-\frac{\mathscr{E}_0}{eE},$$

où la constante d'intégration est choisie de façon que pour $t=0$, $x=0$. De (3') on obtient par intégration élémentaire

$$y=\frac{p_0c}{eE}\,\mathrm{Arcsh}\,\frac{ceEt}{\mathscr{E}_0}.$$

Comme on s'y attendait, y se réduit à zéro lorsque $t=0$. En éliminant t entre les expressions pour x et y, on aboutit à

$$x=\frac{\mathscr{E}_0}{eE}\left(\mathrm{ch}\,\frac{eEy}{\mathscr{E}_0}-1\right).$$

Donc, si la trajectoire classique est une parabole, celle en relativité se présente sous forme de chaînette. Pour le cas $v\ll c$, la chaînette se transforme en parabole. En effet, lorsque $\frac{v}{c}\ll 1$, on a $\gamma\sim 1$, $p_0=m_0v$, et $\mathscr{E}_0=m_0c^2$. En outre, pour les petites valeurs de x

$$\mathrm{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\ldots,$$

d'où

$$x = \frac{\mathscr{E}_0}{eE}\frac{e^2E^2y^2}{2p_0^2c^2} = \frac{m_0c^2}{eE}\frac{(eE)^2\,y^2}{2m_0^2v_0^2c^2} = \frac{eE}{2m_0v_0^2}\,y^2,$$

ce qui donne la parabole classique.

M o u v e m e n t d'u n e p a r t i c u l e c h a r g é e d a n s u n c h a m p m a g n é t i q u e s t a t i q u e u n i f o r m e. Les équations classique et relativiste du mouvement de la particule chargée dans un champ magnétique ont non seulement la même forme

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{1}$$

mais coïncident réellement. Cela s'explique par le fait que le champ magnétique n'effectue aucun travail pour le déplacement de la charge et l'énergie de la particule demeure constante [voir (25) et (26)], bien que les expressions pour l'énergie ne soient pas identiques dans les cas classique et relativiste. A base de la relation relativiste

$$\boldsymbol{p} = \frac{\mathscr{E}}{c^2}\,\boldsymbol{v},$$

où $\mathscr{E}$ = const, l'équation (1) prend la forme

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{ec^2}{\mathscr{E}}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}, \tag{2}$$

alors que la définition classique de l'impulsion $\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{v}$ exige:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{e}{m_0}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}. \tag{3}$$

Ainsi donc, les équations ci-dessus (2) et (3) ne se distinguent que par les facteurs devant le produit vectoriel. Rappelons brièvement comment on procède à la résolution de l'équation (2) ou (3). Dirigeons l'axe des z suivant le champ magnétique. Alors $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{k}$, on est en mesure d'introduire les facteurs constants qui apparaissent devant le produit $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{k}$ dans les équations (3) et (2):

$$\omega_k = \frac{eB}{m_0}, \quad \omega_r = \frac{ec^2B}{\mathscr{E}} = \frac{eB}{m_0\gamma} = \frac{1}{\gamma}\,\omega_k = \omega_k\sqrt{1-\beta^2}. \tag{4}$$

Ensuite, pour fixer les idées, résolvons l'équation (2). En développant le produit vectoriel $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{k}$, récrivons (2) en composantes:

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0. \tag{5}$$

Il est commode de passer à une variable complexe dans le plan (v_x, v_y). En multipliant la seconde équation de (5) par l'unité imaginaire i et l'additionnant à la première, on obtient:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega\,(v_x + iv_y).$$

Cette équation s'intègre immédiatement, pourtant la constante d'intégration doit être complexe

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

où a est une constante complexe. En l'écrivant sous la forme $a = v_{0t}e^{-i\alpha}$ où v_{0t} et α sont réels, la solution sera comme suit :

$$v_x + iv_y = v_{0t}e^{-i(\omega t+\alpha)}. \tag{6}$$

Evidemment v_{0t} représente le module du nombre complexe faisant partie du premier membre de (6) :

$$v_{0t}^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

Par conséquent, la vitesse de la particule dans le plan (x, y) demeure invariable. L'expression (6) aura la forme

$$\frac{d}{dt}(x + iy) = v_{0t}e^{-i(\omega t+\alpha)},$$

qui permet l'intégration directe

$$x + iy = \frac{v_{0t}}{\omega} e^{-i\left(\omega t+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{7}$$

S'étant rappelé le sens géométrique du nombre complexe présenté sous la forme $z = re^{i\varphi}$, on en déduit que la particule décrit toujours la circonférence de rayon constant $r = \frac{v_{0t}}{\omega}$, tandis que l'angle que fait son rayon vecteur avec l'axe des x s'accroît uniformément avec le temps : $\varphi = \omega t + \text{const}$. Cela signifie que le mouvement de la particule projété sur le plan (x, y) est uniforme suivant la circonférence de rayon

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\mathscr{E}}{ec^2B} = \frac{p_t}{eB}, \tag{8}$$

où p_t est la projection de l'impulsion sur le plan (x, y) à la vitesse angulaire ω. Quant au mouvement le long de l'axe des z, la troisième équation (5) donne

$$z = z_0 + v_{0z}t. \tag{9}$$

Il découle des équations (8) et (9) que la particule chargée décrit dans un champ uniforme une hélice, dont l'axe est dirigé suivant le champ magnétique, et de rayon défini par (8). Le module de la vitesse de la particule, comme il doit être pour le champ magnétique, est constant. Lorsqu'au moment initial la vitesse de la particule le long du champ magnétique était nulle ($v_{0z} = 0$), sa trajectoire est une circonférence perpendiculaire au champ.

La grandeur ω_r est une vitesse angulaire de rotation de la projection de la particule sur le plan (x, y) orthogonal à la direction du champ magnétique. Cette vitesse angulaire est dite *vitesse angulaire*

cyclotrone. Comme nous avons déjà mentionné, $\omega_k = \gamma\omega_r$, c.-à-d. que la vitesse cyclotrone des particules rapides est inférieure à celle des particules non relativistes. Aux faibles vitesses $\gamma \to 1$ et $\omega_k \to \omega_r$.

Il paraît intéressant d'envisager le déplacement de la charge dans des champs électrique et magnétique statiques. Le lecteur en trouvera la solution dans l'ouvrage déjà cité de Landau et Lifchitz, *Théorie des champs*, § 22. Il nous reste seulement à ajouter que dans le cas des champs croisés (orthogonaux) qui satisfont à l'inégalité $E^2 - c^2B^2 \neq 0$ (comp. avec le paragraphe 37), on parvient à éliminer, par un choix convenable d'un référentiel d'inertie, soit le champ électrique, soit le champ magnétique. On utilise, pour ce référentiel, les solutions mentionnées plus haut.

En conclusion, envisageons l'accélération acquise par la charge dans le champ électromagnétique d'après la mécanique classique et relativiste. En partant de l'équation générale du mouvement

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\},$$

on obtient pour le cas classique ($\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{v}$)

$$\dot{\boldsymbol{v}}_k = \frac{e}{m_0}\{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\}.$$

Pour déterminer l'accélération relativiste, on fait appel à la relation (41) $\boldsymbol{p} = \frac{\mathscr{E}}{c^2}\boldsymbol{v}$, d'où

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\frac{d\mathscr{E}}{dt} + \frac{\mathscr{E}}{c^2}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

mais, conformément à (26),

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v} = e\boldsymbol{E}\boldsymbol{v},$$

et selon (27)

$$\frac{\mathscr{E}}{c^2} = m_0\gamma,$$

d'où [comp. avec l'équation générale (48)]:

$$\dot{\boldsymbol{v}}_r = \frac{e}{m_0\gamma}\left\{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{v})\right\}.$$

La distinction entre $\dot{\boldsymbol{v}}_k$ et $\dot{\boldsymbol{v}}_r$ est évidente ; la correction relativiste de l'accolade correspond à l'apparition du « freinage » qui finalement ne permet pas à la particule de « dépasser » la vitesse c de la lumière. Pour les vitesses satisfaisant à la condition $\beta \ll 1$, on aboutit à l'égalité $\dot{\boldsymbol{v}}_k = \dot{\boldsymbol{v}}_r$.

P r o b l è m e d e K e p l e r (mouvement de la particule dans le champ d'une force radia-

1 e). La solution de ce problème inclut celles de la révolution des planètes dans le système solaire et du déplacement d'une charge de masse m_0 dans le champ d'une autre charge électrique dont la masse est supposée si grande qu'on la prend pour immobile.

Le problème de Kepler consiste en définition du mouvement d'une particule soumise à la force qui est partout dirigée vers le même point déterminé (« foyer »). La valeur de la force ne dépend que de la distance du foyer et est indépendante du temps. Donc, la force est considérée comme potentielle

$$\boldsymbol{F}(r)=F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-\operatorname{grad} U(r), \quad \operatorname{grad} U(r)=\frac{dU}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{1}$$

où r est la distance calculée à partir du foyer.

Tout comme pour les problèmes précédents, nous écrivons parallèlement les solutions classique et relativiste. Afin d'obtenir la trajec toire de la particule, il faut intégrer l'équation du mouvement:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{F}(r) \quad \text{ou} \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=-\operatorname{grad} U(r). \tag{2}$$

Les cas classique et relativiste se distinguent par la définition de l'impulsion:

$$\boldsymbol{p}=m_0\boldsymbol{v}, \quad (3) \quad \Big| \quad \boldsymbol{p}=m_0\gamma\boldsymbol{v}, \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta=\frac{v}{c}. \quad (3')$$

Dans les deux cas, il découle immédiatement des équations du mouvement que la particule se meut dans un plan quelconque. En effet, le produit vectoriel de l'équation (2) par le vecteur $\boldsymbol{r}$ définissant la position de la particule par rapport au foyer a pour expression

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}. \tag{4}$$

$\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{F}$ étant parallèles, le second membre sera égal à zéro. Récrivons le premier membre de (4) compte tenu de l'identité

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}-\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{p}.$$

Mais $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}$ est la vitesse de la particule. L'impulsion dans les deux cas étant parallèle à la vitesse, le second terme du deuxième membre se réduit à zéro. Par conséquent, (4) aura la forme suivante:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=0 \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{M}=\text{const}. \tag{5}$$

Cette conclusion est juste pour l'impulsion classique et relativiste. D'après la définition du produit vectoriel ses facteurs sont obligatoirement orthogonaux au vecteur du produit. Comme le vecteur $\boldsymbol{M}$

est constant, les vecteurs $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{p}$ (de la vitesse $\boldsymbol{v}$) sont toujours coplanaires. Ainsi donc, dans les deux cas, le mouvement dans le champ de forces radiales est plan.

Par définition, le vecteur $\boldsymbol{M}$ est le moment cinétique du système. Nous avons obtenu le résultat bien connu : le moment cinétique de la particule se conserve dans le champ de forces radiales. Comme nous voyons, il en est de même pour le cas relativiste (pour la valeur relativiste de l'impulsion).

Quant au principe de conservation de l'énergie, il fut déjà formulé [voir (17) et (28)] ; il nous reste d'en tirer les relations nécessaires (dans ce qui suit, $m_0 = m$) :

$$\frac{mv^2}{2} + U(r) = \mathscr{E} = \text{const}, \quad (6) \qquad \Big| \qquad mc^2(\gamma - 1) + U(r) = \mathscr{E} = \text{const}. \quad (6')$$

Introduisons dans le plan du mouvement de la particule les coordonnées polaires (r, φ). Dirigeons l'axe des z suivant la normale au plan du mouvement. Ici, l'élément d'un arc de courbe dans le plan sera :

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2.$$

Ayant divisé les deux membres de cette égalité par dt^2, on obtient l'expression de la valeur absolue de la vitesse :

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Les courbes coordonnées du système polaire sont représentées par les cercles dont le centre est à l'origine de référence et les rayons provenant de cette origine qui coïncide avec le centre du champ de forces. Notons par $\boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e}_\varphi$ les vecteurs unitaires tangents aux lignes de coordonnées. Alors le vecteur vitesse se présentera sous la forme

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \tag{*}$$

et le rayon vecteur de tout point est

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r. \tag{**}$$

Rappelons au lecteur que la direction des vecteurs $\boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e}_\varphi$ varie d'un point à un autre, bien qu'ils demeurent partout orthogonaux. Introduisons encore un vecteur unitaire constant $\boldsymbol{k}$ qui suit l'axe des z. A partir de (*) et (**), on arrive à la valeur du vecteur du moment cinétique en coordonnées polaires pour chaque point du plan :

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{k} \\ r & 0 & 0 \\ p_r & p_\varphi & 0 \end{vmatrix} = rp_\varphi\boldsymbol{k}.$$

Les valeurs classique et relativiste de $\boldsymbol{M}$, tout en coïncidant en direction, se distinguent par leurs modules :

$$M = rp_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}, \quad (7)$$

$$M = rp_\varphi = m\gamma r^2\dot{\varphi} = \text{const}. \quad (7')$$

Ecrivons le principe de conservation de l'énergie en coordonnées polaires :

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \mathscr{E}$$

ou, en remplaçant $\dot{\varphi}$ par $\frac{M}{mr^2}$:

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \mathscr{E} = \text{const}. \quad (8)$$

$$mc^2(\gamma - 1) + U(r) = \mathscr{E}, \quad (8')$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}{c^2}}}.$$

La trajectoire du mouvement est facilement déterminée à l'aide de la *formule de Binet* (se rapportant au cas classique) qui est une équation différentielle de l'orbite pour une force donnée. Le cas relativiste a son analogue.

L'équation de la trajectoire de la particule en coordonnées polaires $r = r(\varphi)$ s'obtient par l'élimination du temps entre les équations $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Pour commencer notons que

$$M = mr^2\dot{\varphi}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{mr^2}. \quad (9)$$

$$M = m\gamma r^2\dot{\varphi}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{m\gamma r^2}. \quad (9')$$

Admettons qu'il existe la relation $r = r(\varphi)$. Alors, on passe de la dérivation par rapport à t à celle par rapport à φ de la manière suivante :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi},$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{M}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi}\right). \quad (10)$$

$$\dot{r} = \frac{M}{mr^2\gamma}\frac{dr}{d\varphi},$$

$$\ddot{r} = \frac{M}{mr^2\gamma}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{M}{mr^2\gamma}\frac{dr}{d\varphi}\right). \quad (10')$$

En dérivant par rapport au temps le principe de conservation de l'énergie (8), on obtient en simplifiant par $\dot{r}$:

$$m\ddot{r} - \frac{M^2}{mr^3} = F(r), \quad (11)$$

Il découle du principe de conservation de l'énergie (8′) que

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} = \left(1 + \frac{\mathscr{E} - U(r)}{mc^2}\right)^2. \quad (11')$$

car

$$F(r) = -\frac{dU}{dr},$$

et

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dr}\dot{r}.$$

Remplaçant dans (11) la dérivée $\ddot{r}$ selon (10) et divisant les deux membres par $\frac{M^2}{mr^2}$, on obtient:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right) - \frac{1}{r} = \\ = \frac{m}{M^2}F(r)r^2. \quad (12)$$

Introduisons une nouvelle variable $u = \frac{1}{r}$ et notons que

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = \\ = -\frac{du}{d\varphi}. \quad (13)$$

Alors (12) aura la forme:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{M^2u^2}F(u). \quad (14)$$

La formule (14) n'est autre que la formule de Binet.

D'autre part,

$$\beta^2 = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}{c^2} = \\ = \frac{M^2}{m^2c^2\gamma^2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right], \quad (12')$$

où on a tenu compte des expressions (9′) et (10′) pour $\dot{r}$ et $\dot{\varphi}$. Comme

$$\frac{1}{1-\beta^2} = 1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 1 + \gamma^2\beta^2 = \\ = 1 + \gamma^2\frac{M^2}{m^2c^2\gamma^2}\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right],$$

où l'on a procédé au remplacement identique à celui de (13) pour le cas classique, l'équation (11) se présente sous la forme:

$$1 + \frac{M^2}{m^2c^2}\left[\left(\frac{du^2}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right] = \\ = \left[1 + \frac{\mathscr{E} - U(r)}{mc^2}\right]^2. \quad (13')$$

Il est commode de procéder à la dérivation de (13′) par rapport à φ; simplifiant par le facteur commun $\frac{du}{d\varphi}$ et divisant les deux membres par $\frac{M^2}{m^2c^2}$, on aboutira à l'expression :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \\ = -\frac{m}{M^2u^2}\left(1 + \frac{\mathscr{E} - U(r)}{mc^2}\right)F(u), \quad (14')$$

où l'on a tenu compte de

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} = \frac{1}{u^2}\frac{dU}{du}.$$

La formule (14′) est une analogue relativiste de la formule de Binet (14).

Pour obtenir une trajectoire concrète, il faut donner la fonction potentielle $U(r)$. Etudions le cas de l'attraction coulombienne ou de la pesanteur. Alors,

$$U(r) = -\frac{k}{r} = -ku, \quad \boldsymbol{F}(r) = -\operatorname{grad} U(r) = -\frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} = -ku^2;$$

ici k est une constante dépendant des masses et des charges des corps, ainsi que du choix du système d'unités. Dans ce cas, les formules (14) et (14′) seront respectivement :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{km}{M^2}, \quad (15) \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{km}{M^2}\left(1 + \frac{\mathscr{E} + ku}{mc^2}\right). \quad (15')$$

En introduisant les notations

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 &= 1 - \frac{k^2}{M^2c^2}, \\ A &= \frac{km}{M^2}\left(1 + \frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

l'équation relativiste (15′) se présentera sous la forme :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \omega^2 u = A. \qquad (17)$$

L'équation (17) montre que la formule classique (15) de la trajectoire n'est qu'un cas particulier de l'équation relativiste correspondant à $\omega^2 = 1$ et à la constante modifiée du second membre. Il en résulte immédiatement que lorsque $c \to \infty$, nous aurons réellement $\omega^2 = 1$ et la coïncidence des constantes dans les seconds membres de (15) et (15′).

Cherchons la solution de l'équation générale (17). Elle représente une équation différentielle linéaire du second ordre dont le second membre est constant. La solution générale de l'équation inhomogène est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogène $u'' + \omega^2 u = 0$ et d'une solution particulière de l'équation (17). La solution générale de l'équation homogène est de la forme $u_1 = C_1 \cos \omega\varphi + C_3 \sin \omega\varphi$. Une solution particulière de l'équation (17) est égale à $\frac{A}{\omega^2}$. Donc, la solution générale de (17) s'écrit comme suit

$$u = \frac{1}{r} = C_1 \cos \omega\varphi + C_3 \sin \omega\varphi + \frac{A}{\omega^2}, \qquad (18)$$

et la solution générale de l'équation (15) sera :

$$u = \frac{1}{r} = C_2 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi + \frac{km}{M^2}. \qquad (19)$$

Calculons φ de façon que $\varphi = 0$ corresponde au périhélie de l'orbite (un éloignement minimal du foyer), donc, à la valeur $u = u_{\max}$.

Egalons la dérivée à zéro pour $\varphi = 0$:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0, \text{ c.-à-d. } \omega\,(-C_1 \sin \omega\varphi + C_3 \cos \omega\varphi)_{\varphi=0} = 0.$$

D'où $C_3 = 0$ et, par conséquent, (18) et (19) s'écriront respectivement comme suit:

$$u_{\text{rel}} = C_1 \cos \omega\varphi + \frac{A}{\omega^2} = \frac{A}{\omega^2}(1 + \varepsilon_1 \cos \omega\varphi), \quad \varepsilon_1 = \frac{C_1\omega^2}{A}, \tag{20}$$

$$u_{\text{cl}} = C_2 \cos \varphi + \frac{km}{M^2} = \frac{km}{M^2}(1 + \varepsilon_2 \cos \varphi), \quad \varepsilon_2 = \frac{C_2 M^2}{m}. \tag{21}$$

L'équation $\frac{1}{r} = C\,(1 + \varepsilon \cos \varphi)$ est l'équation générale d'une section conique ayant son foyer à l'origine des coordonnées. Lorsque $\varepsilon < 1$, on obtient l'ellipse. Quand l'angle φ prend les valeurs de 0, 2π, 4π, . . ., le point se trouve au périhélie, celui-ci étant fixé dans le plan; la grandeur du rayon vecteur au périhélie vaut toujours $\frac{1}{C\,(1+\varepsilon)}$.

En Relativité,

$$\frac{1}{r} = C^*\,(1 + \varepsilon_1 \cos \varphi\omega), \quad C^* = \frac{A}{\omega^2}, \tag{22}$$

et la trajectoire du mouvement diffère de celle classique. L'équation n'est plus celle d'une section conique et le périhélie de l'orbite n'est plus fixé dans l'espace. La valeur du rayon vecteur au périhélie est toujours égale à $\frac{1}{C^*\,(1+\varepsilon_1)}$, de telle sorte que le point au périhélie ne quitte jamais la circonférence de ce rayon. Cependant, l'angle correspondant au rayon vecteur du périhélie varie constamment. L'angle φ_1 décrit par le premier périhélie est égal à zéro. La position suivante du périhélie se détermine par l'égalité $\omega\varphi = 2\pi$, donc $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\omega}$. Dans tous les cas intéressants, ω^2 est légèrement inférieur à l'unité et $\varphi_2 > 2\pi$. Donc, dans le cas relativiste, a lieu le mouvement orbital du périhélie dont le déplacement angulaire fait en une rotation vaut

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\omega} - 2\pi = 2\pi\left(\frac{1}{\omega} - 1\right). \tag{23}$$

Donc, à la différence du cas classique, le mouvement suit dans le cas relativiste une orbite complexe; les périhélies successifs des orbites décrivent une circonférence. Si l'on fait appel au système de coordonnées qui sera en rotation avec le périhélie, c.-à-d. si l'on pose

$$r = r, \quad \Psi = \omega\varphi,$$

l'orbite de ce système représentera une ellipse ordinaire. Ses paramètres différeront quelque peu de ceux de l'ellipse classique. Du point de vue du repère « immobile », la particule décrit une rosette.

Les astronomes découvrirent depuis longtemps que pour certaines planètes avait lieu un déplacement des périhélies de quelques secondes d'arc par siècle. Le déplacement le plus manifeste (de 43″) est observé chez Mercure, planète la plus proche du Soleil. Pourrait-on expliquer ceci à l'aide du résultat (23)? Or, le déplacement, selon (23), s'est avéré trop petit et ne fait que 7″.

Cet écart inexplicable, la Relativité généralisée le comble d'emblée. Citons, sans déduction, l'analogue relativiste généralisé de la formule de Binet. La considération du mouvement d'un corps dans un champ central d'un corps massif (problème de Schwarzschild) donne en nos désignations pour l'équation de la trajectoire [comp. avec (15) et (15′)]:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{m}{M^2}+3mu^2.$$

Cette équation n'est plus linéaire (terme de $3mu^2$) ; elle se résout approximativement et donne pour le déplacement de périhélie avec une très bonne précision la valeur recherchée de 43″. Notons en conclusion que la résolution mentionnée n'est pas très logique dans le cadre de la Relativité restreinte. L'action réciproque des corps est considérée à l'approximation newtonienne, c.-à-d. qu'on néglige le retard en action entre eux.

Quand on traite des révolutions de planètes, le coefficient k, introduit dans la fonction potentielle $U(r)$, est égal à Gmm_1, où G est la constante de gravitation, m la masse d'une planète, m_1 la masse du Soleil. Notons que les masses au repos m et m_1 font partie de l'expression de la force de gravitation.

31. Fonctions relativistes de Lagrange et de Hamilton. Les équations de Lagrange et de Hamilton sont utilisées dans l'analyse de divers problèmes mécaniques ou électrodynamiques. Nous allons voir quelle est la procédure à suivre lors de la construction des fonctions relativistes de Lagrange et de Hamilton pour une particule. Si notre méthode n'est pas très stricte et conséquente, elle nous amène tout de même assez vite aux expressions recherchées. Comme il est d'usage, abordons le problème par un bref préambule concernant les notions classiques ; envisageons le cas tridimensionnel le plus simple en coordonnées cartésiennes. Les équations de Lagrange en écriture symbolique ont la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}-\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=\operatorname{grad}_{\boldsymbol{r}} L,\qquad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=\operatorname{grad}_{\boldsymbol{v}} L.$$

La fonction de Lagrange n'est qu'une différence entre les énergies cinétique et potentielle :

$$L = T - U = \frac{mv^2}{2} - U(x, y, z) = \frac{mv^2}{2} - U(\boldsymbol{r}).$$

En composant la différentielle

$$dL = m\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{v} - \text{grad}\, U \cdot d\boldsymbol{r},$$

nous voyons immédiatement que

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \equiv \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = -\text{grad}\, U = \boldsymbol{F},$$

car, par définition, $\boldsymbol{F} = -\text{grad}\, U$.

L'énergie du système se définit selon la fonction de Lagrange de la façon suivante :

$$\mathscr{E} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\, \boldsymbol{v} - L = \frac{mv^2}{2} + U = \frac{p^2}{2m} + U.$$

Dans le cas ci-dessus, les équations de Lagrange s'identifient au principe fondamental de Newton :

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}.$$

Rappelons que l'expression $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{P}$ est appelée impulsion généralisée qui, dans notre cas, coïncide avec l'impulsion usuelle $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$.

La fonction de Hamilton s'obtient à l'aide de la fonction de Lagrange d'après la formule :

$$\mathscr{H} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\, \boldsymbol{v} - L;$$

cette quantité doit être finalement exprimée en coordonnées et impulsions généralisées (mais non en vitesses généralisées). Dans le cas envisagé de l'espace tridimensionnel et des coordonnées cartésiennes, $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}}{m}$ et

$$\mathscr{H} = \frac{\boldsymbol{p}}{m}\, \boldsymbol{p} - \frac{p^2}{2m} + U = \frac{p^2}{2m} + U.$$

La fonction de Hamilton étant connue, on trouve les équations du mouvement à l'aide des formules :

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \boldsymbol{r}}$$

$$\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \boldsymbol{p}} = \text{grad}_p\, \mathscr{H}, \quad \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \boldsymbol{r}} = \text{grad}_r\, \mathscr{H}\right).$$

Il est facile de remarquer que les équations ci-dessus nous renvoient au principe fondamental de la mécanique ; la première de ces équa-

tions définit l'impulsion, tandis que la seconde exprime le principe fondamental de la mécanique. Toutes ces relations se généralisent à tout nombre de degrés de liberté, ce qui n'y est pas d'ailleurs nécessaire.

Généralisation des équations de Lagrange. Nos relations se rapportaient au cas où l'énergie potentielle ne dépendait que des coordonnées, la vitesse de la particule n'y jouant aucun rôle. Il s'avère pourtant que les équations de Lagrange gardent aussi leur forme quand

$$U = U(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$$

si seulement a lieu

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad}_r U + \frac{d}{dt} \operatorname{grad}_v U. \qquad (*)$$

En effet, considérant toujours $L = T - U$, on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} - \operatorname{grad}_v U, \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = -\operatorname{grad}_r U,$$

et les équations du mouvement seront donc:

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) - \frac{d}{dt}\operatorname{grad}_v U - \operatorname{grad}_r U = 0.$$

La dernière équation, selon (*), exprime le principe fondamental de la mécanique, ce qui touche directement l'Electrodynamique. La force appliquée à une charge s'écrit:

$$\boldsymbol{F} = e\{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\}.$$

Exprimée en fonction des potentiels d'un champ électromagnétique $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \dot{\boldsymbol{A}}$, $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, elle sera:

$$\boldsymbol{F} = e\left\{-\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{A}\right\}.$$

Démontrons que cette force peut être présentée sous la forme (*) où $U = e\varphi - e(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})$, et $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$. En effet,

$$\operatorname{grad}_r U = e \operatorname{grad}_r \varphi - e(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A} - e\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{A};$$

d'après la formule générale

$$\operatorname{grad}_r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{A} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v},$$

mais comme $\boldsymbol{v}$ est une variable indépendante et ne dépend pas de $\boldsymbol{r}$, les deux derniers termes s'éliminent. Ensuite,

$$\operatorname{grad}_v U = -e\boldsymbol{A},$$

comme $\boldsymbol{A}$ ne dépend pas de $\boldsymbol{v}$,

$$\frac{d}{dt}\operatorname{grad}_v U = -e\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}.$$

Ecrivons (*) sous forme d'une somme des termes obtenus:

$$-e \operatorname{grad}_r \varphi + e (\boldsymbol{v}\nabla) \boldsymbol{A} + e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} - e\dot{\boldsymbol{A}}.$$

Rappelons la formule générale qui définit la dérivée « substantielle » pour la particule mobile:

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla) \boldsymbol{A} = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}.$$

On a donc:

$$\boldsymbol{F} = e \left\{ -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \right\},$$

c.-à-d. on aboutit à l'expression de la force recherchée. Par conséquent, la fonction classique de Lagrange pour une particule dans un champ électromagnétique est de la forme *)

$$L = T - U(\boldsymbol{r}) - e\varphi + e\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}. \qquad (88)$$

Naturellement, l'expression de l'impulsion généralisée ne sera plus la même en l'absence de champ électromagnétique:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v} + e\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}.$$

Il est facile d'écrire la fonction non relativiste de Hamilton pour une particule dans un champ électromagnétique:

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{m} (\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A}),$$

$$\mathcal{H} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} - L = \frac{1}{m} (\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A}) \boldsymbol{P} - \frac{m}{2} \left(\frac{\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A}}{m} \right)^2 +$$

$$+ U(\boldsymbol{r}) + e\varphi - \frac{e\boldsymbol{A}}{m} (\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2m} (\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A})^2 + U(\boldsymbol{r}) + e\varphi. \qquad (89)$$

Ainsi donc, nous avons obtenu les fonctions non relativistes de Lagrange (88) et de Hamilton (89) pour la particule chargée dans un champ électromagnétique.

Forme relativiste des équations de Lagrange. En mécanique relativiste, l'énergie cinétique de la particule n'est plus une fonction quadratique homogène de la vitesse. D'où il vient que la fonction de Lagrange n'aura plus d'une forme si simple qu'en mécanique classique où $L = T - U$. Toutefois, on réussit à la découper en une somme de deux termes dont l'un ne dépend que de la vitesse de la particule et l'autre de ses coordonnées. Posons

$$L = F(v) - U(\boldsymbol{r}),$$

où F est une fonction encore inconnue.

*) Ci-dessous, le numérotage des formules suit celui du paragraphe 29.

L'impulsion reste la même:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \mathrm{grad}_{\boldsymbol{v}} L = \mathrm{grad}_{v} F = \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\boldsymbol{v}}{v} .$$

La fonction de Lagrange doit être choisie de telle sorte qu'elle fournisse une juste valeur relativiste de l'impulsion $\boldsymbol{P} = m_0\gamma \boldsymbol{v}$.

Donc, on doit avoir la relation

$$\frac{\partial F}{\partial v} \frac{\boldsymbol{v}}{v} = m_0\gamma \boldsymbol{v} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ,$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

La dernière expression peut être soumise à l'intégration élémentaire:

$$F(v) = -m_0c^2\sqrt{1-\beta^2} + C.$$

Comme dans la fonction de Lagrange la constante additive n'est pas essentielle, on admet que

$$F(v) = -m_0c^2\sqrt{1-\beta^2} = -\frac{m_0c^2}{\gamma} .$$

Cette quantité s'appelle *potentiel cinétique*. Donc, la fonction relativiste de Lagrange s'écrira sous la forme:

$$L = F(v) - U = -\frac{m_0c^2}{\gamma} - U(\boldsymbol{r}). \qquad (90)$$

Ecrivons l'expression de l'impulsion généralisée que nous désignerons par $\boldsymbol{P}$. Comme au début de notre raisonnement nous avons fait le choix convenable du potentiel cinétique de façon à obtenir l'impulsion relativiste, on a évidemment:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m_0\gamma \boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}_{\mathrm{rel}}.$$

D'où

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{P}}{m_0\gamma} . \qquad (91)$$

Notons deux formules qui pourront par la suite nous être utiles:

$$v^2 = \frac{P^2c^2}{P^2+m_0^2c^2} , \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{m_0c}{\sqrt{P^2+m_0^2c^2}} . \qquad (92)$$

Les équations de Lagrange $\dot{\boldsymbol{P}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}$ se présentent comme suit

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}, \qquad (93)$$

car

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}}\, U.$$

c.-à-d. qu'elles donnent l'équation relativiste correcte du mouvement d'un point. On s'assure aisément que la fonction de Lagrange (90) fournit une expression correcte de l'énergie de la particule relativiste :

$$\mathscr{E}=\frac{\partial L}{\partial v}\,\boldsymbol{v}-L=\frac{\partial F}{\partial v}\,\boldsymbol{v}-L=m_0\gamma \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}-\frac{1}{\gamma}\,m_0c^2+U=m_0c^2\gamma+U(\boldsymbol{r}).$$

Trouvons maintenant l'analogue relativiste de la fonction de Hamilton :

$$\mathscr{H}=\frac{\partial L}{\partial v}\,\boldsymbol{v}-L=\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{v}}\,\boldsymbol{v}-L=\boldsymbol{P}\,\frac{\boldsymbol{P}}{m_0\gamma}+\frac{m_0c^2}{\gamma}+$$
$$+U(\boldsymbol{r})=\frac{P^2+m_0^2c^2}{m_0}\,\frac{m_0c}{\sqrt{P^2+m_0^2c^2}}+U(\boldsymbol{r})=c\sqrt{P^2+m_0^2c^2}+U(\boldsymbol{r}).$$

Le dernier chaînon de l'équation est justement la fonction recherchée de Hamilton ; elle s'exprime en fonction de l'impulsion généralisée $\boldsymbol{P}$. L'équation du mouvement déduite de cette fonction de Hamilton :

$$\dot{\boldsymbol{P}}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial \boldsymbol{r}}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F},$$

est une équation relativiste correcte du mouvement d'un point (93). Le second groupe d'équations peut être transformé compte tenu de (92) :

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial \boldsymbol{P}}=\frac{1}{2}\,\frac{2cP}{\sqrt{P^2+m_0^2c^2}}\,\frac{\boldsymbol{P}}{P}=$$
$$=\frac{c\boldsymbol{P}}{\sqrt{P^2+m_0^2c^2}}=\frac{m_0c}{\sqrt{P^2+m_0^2c^2}}\,\frac{\boldsymbol{P}}{m_0}=\frac{\boldsymbol{P}}{m_0\gamma}\,.$$

On a obtenu la définition de l'impulsion P, ce qui vient de (91).

A présent, on est en mesure d'envisager la charge relativiste dans un champ électromagnétique. Vu que l'expression de la force appliquée à la charge du côté du champ est la même pour les cas classique et relativiste, on arrive immédiatement à la fonction relativiste de Lagrange pour la particule dans un champ électromagnétique :

$$L=-\frac{m_0c^2}{\gamma}-U(\boldsymbol{r})-e\varphi+e(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}). \qquad (94)$$

Dans ce cas, l'impulsion généralisée sera déjà de la forme

$$\boldsymbol{P}=\frac{\partial L}{\partial v}=m_0\gamma\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{A}, \qquad (95)$$

et la vitesse $\boldsymbol{v}$ de la particule s'exprime en fonction de $\boldsymbol{P}$ de la façon suivante :

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A}}{m_0\gamma}\,. \qquad (96)$$

Comme l'expression (96) diffère de (91) par ce que $\boldsymbol{P}$ y est remplacée par $\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A}$, on écrit immédiatement au lieu de (92) l'expression

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{m_0c}{\sqrt{(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2+m_0^2c^2}}\,. \tag{97}$$

Tenant compte de (95) à (97), on parvient facilement à trouver la fonction de Hamilton recherchée :

$$\mathcal{H}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}-L=\boldsymbol{P}\frac{\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A}}{m_0\gamma}+\frac{m_0c^2}{\gamma}+U(\boldsymbol{r})+$$
$$+e\varphi-e\boldsymbol{A}\left(\frac{\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A}}{m_0\gamma}\right)=\frac{(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2+m_0^2c^2}{m_0\gamma}+$$
$$+U(\boldsymbol{r})+e\varphi=c\sqrt{(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2+m_0^2c^2}+U(\boldsymbol{r})+e\varphi. \tag{98}$$

On laisse au lecteur le soin d'envisager le passage des fonctions relativistes (94) et (98) aux fonctions non relativistes (88) et (89).

Il est à noter, pour en finir, que la construction des fonctions relativistes de Lagrange et de Hamilton pour les systèmes des particules en interaction heurte les difficultés provenant de la limitation de la vitesse de transmission de l 'action. Pratiquement il est indispensable de prendre en considération le champ transmetteur de l'action. On trouve la fonction approchée de Lagrange qui tient compte de la finitude de la vitesse de transmission des actions entre les charges électriques dans les ouvrages suivants : Landau et Lifchitz, *Théorie des champs*, Editions Mir, Moscou, 1970 ; Fock, *The theory of space, time and gravitation* (traduit du russe), Pergamon press, 1959.

CHAPITRE V

ÉLECTRODYNAMIQUE RELATIVISTE *)

32. Quadripotentiel et quadricourant. Nous avons déjà maintes fois souligné que la théorie de la relativité fournit les méthodes efficaces de l'étude des phénomènes physiques dans tous les référentiels d'inertie. L'équivalence de tous les référentiels d'inertie en est le concept fondamental. C'est dire que toutes les équations fondamentales traduisant les phénomènes physiques doivent avoir, à part les désignations, la même forme quel que soit le référentiel d'inertie. Les phénomènes électromagnétiques sont régis par le système d'équations fondamentales de Maxwell. Il est remarquable que ce système, élaboré le demi-siècle avant l'apparition de la Relativité restreinte, conserve complètement sa forme dans tous les référentiels d'inertie, c.-à-d. il est invariant par la transformation de Lorentz. Pour mettre à jour la covariance du système d'équations de Maxwell par cette transformation, il suffit de le présenter sous forme quadridimensionnelle. Il en découlera les unions inséparables des charges et des courants, des moments électriques et magnétiques, des champs électriques et magnétiques. On découvrira également les relations entre d'autres grandeurs physiques. Cette interdépendance intime de certaines grandeurs physiques n'est devenue évidente qu'après l'intervention des méthodes relativistes dans le domaine des phénomènes électromagnétiques.

Bien que les équations ne subissent pas de profondes modifications, on y procédera de proche en proche. Il serait peut-être mieux d'aborder le problème par la démonstration de la covariance des équations de Maxwell par la transformation de Lorentz. Cela aurait souligné immédiatement la covariance relativiste de la théorie de Maxwell. Mais, pour simplifier la compréhension, il est préférable de commencer par les conséquences des équations de Maxwell, à savoir par l'étude des équations du potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ et du potentiel scalaire φ dans le vide. Ces potentiels sont les solutions des *équations de*

---

*) Dans ce chapitre, toutes les équations et formules électrodynamiques sont exprimées en unités de SI. Pour les raisons de commodité, certaines formules fondamentales sont également données en unités du système de Gauss (voir la fin du chapitre, p. 190).

d'Alembert:

$$\Box\, \boldsymbol{A} \equiv \Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{j}, \qquad (1)$$

$$\Box\, \varphi \equiv \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

On y sous-entend que la densité de courant $\boldsymbol{j}$ et la densité de charge ρ sont des fonctions des coordonnées et du temps $\rho(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$. La perméabilité magnétique et la constante diélectrique pour le vide sont désignées par μ_0 et ε_0 respectivement; la vitesse de la lumière dans le vide est $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. Les équations (1) et (2) pour les potentiels $\boldsymbol{A}$ et φ ont lieu tant que ces derniers satisfont à la *condition de Lorentz*:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi} = 0. \qquad (3)$$

Un des plus importants principes de conservation est celui de *conservation de la charge* (équation de continuité):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0. \qquad (4)$$

La densité de courant $\boldsymbol{j}$ s'exprime en fonction de la densité de la charge et de sa vitesse:

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}. \qquad (5)$$

Ici, il faut obligatoirement préciser le système de référence dans lequel $\boldsymbol{v}$ est considérée.

Il découle des équations (1) et (2) que les composantes A_x, A_y, A_z du potentiel vecteur, ainsi que le potentiel scalaire φ, satisfont aux mêmes équations différentielles (équations de d'Alembert) qui ne se distinguent que par les deuxièmes membres. Il devient donc possible de réunir les trois équations (1) et une équation (2) en une seule équation quadridimensionnelle vectorielle en introduisant deux quadrivecteurs:

$$\text{vecteur quadripotentiel } \vec{\Phi}\begin{pmatrix} A_x, & A_y, & A_z, & \frac{i}{c}\varphi \\ \Phi_1, & \Phi_2, & \Phi_3, & \Phi_4 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

$$\text{vecteur quadridensité de courant } \vec{s}\begin{pmatrix} j_x, & j_y, & j_z, & ic\rho \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

et en tenant compte de la définition du quadrirayon vecteur:

$$\vec{R}\begin{pmatrix} x, & y, & z, & ict \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

La comparaison des composantes des quadrivecteurs $\vec{\Phi}$, $\vec{s}$, $\vec{R}$, rangées en deux lignes, permet d'en tirer les valeurs nécessaires. Une fois le quadripotentiel et la quadridensité de courant définis, les équations (1) et (2) fusionnent:

$$\Box \Phi_i = -\mu_0 s_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{9}$$

La coïncidence des trois équations (9), pour $i = 1, 2, 3$, avec l'équation (1) est évidente. Pour $i = 4$, l'équation (9) donne

$$\Box \frac{i}{c} \varphi = -\mu_0 i c \rho,$$

mais

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \tag{10}$$

et on retrouve l'équation (2).

La condition de Lorentz et le principe de conservation de la charge se représentent au moyen de quadridivergence des vecteurs $\vec{\Phi}$ et $\vec{s}$. En effet,

$$\operatorname{div} \vec{\Phi} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_4} =$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{i}{c} \varphi\right)}{\partial (ict)} = \operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}, \tag{11}$$

$$\operatorname{div} \vec{s} = \frac{\partial s_i}{\partial x_i} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial (ic\rho)}{\partial (ict)} = \operatorname{div} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{12}$$

Il en découle que la condition et le principe ci-dessus s'exprimeront sous forme quadridimensionnelle:

$$\operatorname{div} \vec{\Phi} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{s} = 0. \tag{13}$$

Or, la divergence quadridimensionnelle est l'invariant de la transformation de Lorentz (voir Appendice, 4). Par conséquent, elle conserve sa forme dans tous les réferentiels d'inertie. La démonstration de l'invariance des équations (9) est donnée en Appendice, 37. Ainsi donc, les équations des potentiels, le principe de conservation de la charge et la condition de Lorentz sont écrits de sorte qu'ils conservent leur forme dans tout référentiel d'inertie.

33. Transformations du quadripotentiel et de la quadridensité de courant. Après avoir réuni les potentiels tridimensionnels vectoriel et scalaire en un seul quadrivecteur, on peut écrire automatiquement les règles de transformation du quadrivecteur potentiel et du

quadrivecteur courant [voir (II, 27)]:

$$\Phi_1=\Gamma(\Phi_1'-iB\Phi_4'),\quad \Phi_2=\Phi_2',\quad \Phi_3=\Phi_3',\quad \Phi_4=\Gamma(\Phi_4'+iB\Phi_1'),\tag{14}$$

$$s_1=\Gamma(s_1'-iBs_4'),\quad s_2=s_2',\quad s_3=s_3',\quad s_4=\Gamma(s_4'+iBs_1').\tag{15}$$

Faisons une étude détaillée de la transformation de la densité de courant. Le 4-courant est défini par la densité de courant et celle de charge. Il est tout à fait naturel que le courant et la densité de charge se sont réunis en un seul quadrivecteur. S'il s'agit des référentiels en mouvement relatif, la charge n'est au repos que dans son référentiel « propre ». Dans tous les autres référentiels d'inertie, elle se meut et représente donc, du point de vue de ces systèmes, un courant. On en arrive à la conclusion que le passage de la charge immobile (électrostatique !) au courant est la transition du système de référence propre à tout autre système. Ici, il ne s'agit pas, bien entendu, du courant dans un milieu, mais plutôt du courant de convection. On parle ici de la charge « liée » à quelque référentiel et par le courant de convection on entend habituellement le transfert des charges par le milieu en mouvement.

Le courant circule dans une substance même lorsque $\rho=0$. A cet effet, citons le cas des métaux où la densité totale (la somme des charges d'ions et d'électrons libres) est nulle: $\rho=\rho_+ + \rho_- = 0$. Mais le courant existe s'il y a un mouvement ordonné des électrons: $\boldsymbol{j}=\rho_+\boldsymbol{v}_+ + \rho_-\boldsymbol{v}_- = \rho_-\boldsymbol{v}_-$, car la vitesse des ions est alors nulle.

Des formules (15) on obtient immédiatement le courant de convection pour tout référentiel autre que le système propre de la charge. Supposons donc que ρ' soit la densité de charge dans K' en l'absence de courant ($\boldsymbol{j}'=0$). Il en résulte que, dans le système K', la quadri-densité de courant a pour composantes $\vec{s}'\,(0,\ 0,\ 0,\ ic\rho'=ic\rho_0)$, c.-à-d. $s_1'=s_2'=s_3'=0$, $s_4'=ic\rho_0$. Alors, compte tenu de (15), on a pour le système de référence K

$$\begin{aligned} s_1 &= \Gamma(-iBic\rho_0) = \Gamma V\rho_0,\\ s_2 &= s_3 = 0,\quad s_4 = \Gamma ic\rho_0. \end{aligned}\tag{16}$$

En développant la dernière équation (16), on arrive à:

$$s_4 \equiv ic\rho = \frac{ic\rho_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Ainsi, on a obtenu la loi de transformation de la densité de charge, reliant le système propre où la charge est au repos au système relativement auquel elle se déplace avec la vitesse V:

$$\rho=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.\tag{17}$$

La première équation de (16) fournit:

$$s_1 = j_x = \frac{\rho_0 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \rho V. \tag{18}$$

Le courant provenant du mouvement de la charge est dit, comme nous l'avons déjà mentionné, *courant de convection.*

L'interprétation de (18) est simple. La vitesse de la charge immobile dans K' est égale à V par rapport au système K [c'est aussi la vitesse du système K' ; la même conclusion découle de la formule relativiste de la transformation des vitesses (III, 6)]. Voici pourquoi, l'expression (18) n'est autre chose que le courant de convection. En ce qui concerne la variation de la densité de charge (17), elle est due à la modification du volume (la densité est une charge par unité de volume). Puisque le volume $\mathfrak{B}$ varie selon la loi

$$d\mathfrak{B} = d\mathfrak{B}_0 \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}},$$

et il s'agit du même volume physique contenant la même charge de, alors:

$$\rho_0 = \frac{de}{d\mathfrak{B}_0}, \quad \text{et} \quad \rho = \frac{de}{d\mathfrak{B}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \frac{de}{d\mathfrak{B}_0} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \rho_0 \Gamma.$$

La charge totale du volume donné se conserve évidemment dans tout référentiel:

$$\rho_0 d\mathfrak{B}_0 = \rho d\mathfrak{B}. \tag{19}$$

La formule (17) permet d'écrire les composantes du quadricourant $\vec{s} = (\rho \boldsymbol{v}, ic\rho)$ sous une forme plus commode. Rattachons le système K^0 à la charge mobile (qui est en mouvement rectiligne et uniforme en général ou pendant un court intervalle de temps). La densité de charge est ρ_0 dans le système K^0. Soit $\boldsymbol{v}$ la vitesse de la charge par rapport au système K. Alors, dans K on a pour densité $\rho = \rho_0 \gamma$. Par suite, on peut écrire $\vec{s}(\rho_0 \gamma \boldsymbol{v}, ic\rho_0\gamma)$. On est conduit alors à

$$\vec{s} = \rho_0 \vec{V} \tag{20}$$

ou en composantes

$$s_i = \rho_0 u_i, \tag{21}$$

où ρ_0 est la densité de charge au système où celle-ci est immobile. Pour $\vec{s}^2$, on a:

$$\vec{s}^2 = \rho_0^2 \gamma^2 (v^2 - c^2) = -\frac{\rho_0^2}{c^2}. \tag{22}$$

Cela signifie que le quadrivecteur $\vec{s}$ est du genre temps, ce qui traduit le fait que la vitesse v de la charge est toujours inférieure à c.

S'il y a, dans le système K', un conducteur non chargé parcouru par le courant, c.-à-d. dans K',

$$\vec{s}_0'(j_{x0},\ j_{y0},\ j_{z0},\ ic\rho_0 = 0),$$

on décèle alors une certaine densité ρ de charge dans le système K. En effet, d'après (15), on a:

$$s_1 = \Gamma j_{x0}, \quad s_2 = j_{y0}, \quad s_3 = j_{z0}, \quad s_4 \equiv ic\rho = \Gamma i \mathrm{B} j_{x0}. \tag{23}$$

Les trois premières formules de (23) définissent les valeurs du courant dans K, la dernière donnant la densité de charge dans ce même système K:

$$\rho = \Gamma \frac{\mathrm{B}}{c} j_{x0}. \tag{24}$$

Donc, l'observateur en K mesure la densité ρ, bien que celle-ci soit absente en K'. L'interprétation géométrique du résultat obtenu est donnée au chapitre VIII, paragraphe 56.

34. Expression des vecteurs champs électromagnétiques en fonction du quadripotentiel *). Il est souvent d'usage en Electrodynamique de retrouver l'intensité du champ électrique $\boldsymbol{E}$ et l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ moyennant les grandeurs auxiliaires, telles que les potentiels vectoriel $\boldsymbol{A}$ et scalaire φ, selon les formules:

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{25}$$

Récrivons ces formules en composantes du 4-potentiel:

$$B_x \equiv B_1 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}, \tag{26}$$

$$E_x \equiv E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{c}{i}\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} ic = ic\left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4}\right). \tag{27}$$

Les seconds membres des équations (26) et (27) sont écrits compte tenu de la définition des composantes du 4-potentiel. De façon analogue en se servant des composantes de $\vec{\Phi}$, on peut écrire les autres composantes des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$. Nous obtenons donc les formules analogues à (26) et (27), selon lesquelles toutes les composantes de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ représentent certaines combinaisons de dérivées des composantes du quadrivecteur $\vec{\Phi}$ par rapport aux coordonnées quadridimension-

*) Dans les chapitres précédents, la lettre B désignait le rapport de la vitesse du repère à celle de la lumière. Ici, on est contraint d'introduire le vecteur (induction) $\boldsymbol{B}$ et ses projections B_x, B_y, B_z. Par la suite nous n'utiliserons, dans les formules de transformation, la désignation $\mathrm{B} = \frac{V}{c}$ que dans les cas où cela n'évoque aucune confusion.

nelles. Ces combinaisons forment le 4-tenseur antisymétrique du second ordre:

$$F_{ik}=c\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_i}-\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k}\right) \quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{28}$$

On n'a pas besoin de démontrer que c'est un tenseur (voir Appendice, 33), car les dérivées des composantes d'un vecteur se transforment selon la règle de transformation des tenseurs. Pour se convaincre de ce que le tenseur (28) ne contient que $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$, il suffit de donner aux indices i et k de (28) indépendamment les valeurs de 1 à 4. On aura ainsi seize valeurs de F_{ik} (dont quatre sont nulles) exprimées en composantes $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$. Présentons ces composantes sous forme de la matrice *):

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Comme d'habitude, dans F_{ik} le premier indice i désigne la ligne et l'indice k la colonne.

Le tenseur peut être présenté sous forme condensée $\mathfrak{F} = (c\boldsymbol{B}, -i\boldsymbol{E})$ où la disposition des composantes des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ est conforme à (29). La description d'un champ électromagnétique (il s'agit pour le moment de deux vecteurs des champs moyens) par un tenseur antisymétrique est parfaitement logique, car le nombre de coordonnées indépendantes de ce tenseur est égal à six, comme chez deux vecteurs tridimensionnels.

Le résultat obtenu se distingue essentiellement de l'image tridimensionnelle usuelle. Les vecteurs tridimensionnels $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$, tout en s'exprimant en composantes du 4-potentiel, n'ont eux-mêmes aucun complément pour devenir quadrivecteurs. Dans l'espace quadridimensionnel, le champ électromagnétique représente une grandeur unie, plus complexe par sa nature mathématique qu'un vecteur. Les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ ont fusionné en un 4-tenseur appelé *tenseur du champ électromagnétique*.

L'apparition d'un 4-tenseur au lieu de deux vecteurs tridimensionnels qui décrivent le champ électromagnétique a une signification physique bien évidente. Les champs magnétique et électrique sont inséparables et l'« apparition » ou la « disparition » de l'un d'eux n'est qu'une question du choix d'un système de référence. Le champ « purement » électrique créé par une charge n'existe que dans

*) Nous employons, comme dans beaucoup d'ouvrages sur l'Electrodynamique relativiste, les indices i et k malgré l'unité imaginaire qui, elle aussi, est désignée par i. Nous espérons que le lecteur nous suivra sans difficultés.

le système où la charge est au repos. Mais, dans tout autre référentiel, cette charge se meut en faisant naître le courant électrique qui crée un champ magnétique. D'autre part, on a vu que si un conducteur parcouru par un courant est neutre dans un certain référentiel, dans d'autres référentiels d'inertie il est chargé (voir la page 144) et, par conséquent, un champ électrique y apparaît. Il suffit donc qu'un champ électrique apparaisse dans un système K, pour qu'un champ magnétique soit décelé dans tout autre système K'. Si dans K il n'y a que le champ magnétique, alors, dans tout autre système K', il apparaît les champs électrique et magnétique.

Rien ne peut compléter les vecteurs tridimensionnels d'un champ électromagnétique jusqu'aux quadrivecteurs. En outre, si chacun des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ faisait partie de « son » propre quadrivecteur, il devrait s'exprimer dans un « nouveau » repère en composantes de « son » vecteur du repère précédent moyennant la transformation de Lorentz. Cela signifierait l'indépendance des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ entre eux. L'expérience se déclare toutefois pour la relation intime entre les champs électrique et magnétique, c.-à-d. entre $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$. L'union la plus simple de deux vecteurs tridimensionnels est un tenseur antisymétrique possédant six composantes indépendantes (voir Appendice, 3). On l'appelle parfois 6-vecteur. Une combinaison quelconque de toutes les composantes du tenseur dans un nouveau référentiel étant une combinaison linéaire des composantes du tenseur de l'ancien référentiel, alors, en passant d'un référentiel à un autre, le champ électrique peut y apparaître à cause du champ magnétique existant dans le référentiel précédent, et vice versa. A un certain sens, le champ électromagnétique représente une formation fermée: s'il n'existe dans quelque référentiel ni le champ électrique ni celui magnétique, le champ électromagnétique n'apparaîtra dans aucun autre référentiel. En remettant la transformation formelle des champs au plus tard, nous abordons maintenant l'analyse du champ électromagnétique dans un milieu.

Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire, en plus des champs moyens $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$, encore deux vecteurs. On prend pour ces vecteurs soit le vecteur induction électrique $\boldsymbol{D}$ et le vecteur champ magnétique $\boldsymbol{H}$, soit le vecteur polarisation électrique $\boldsymbol{P}$ et le vecteur aimentation $\boldsymbol{M}$. Les quatre vecteurs cités sont reliés par les formules suivantes:

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}. \tag{30}$$

Les vecteurs $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{D}$ forment leur propre tenseur particulier dont les composantes sont désignées habituellement par f_{ik} et le tenseur lui-même s'écrit sous la forme abrégée $\mathfrak{F}=(\boldsymbol{H}, -ic\boldsymbol{D})$. Ce tenseur s'obtient de (29) par la substitution des composantes $\boldsymbol{H}$ et $-ic\boldsymbol{D}$ aux composantes $c\boldsymbol{B}$ et $-i\boldsymbol{E}$ respectivement. Voici la matrice de ce

tenseur:

$$f_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}. \qquad (31)$$

Parallèlement au tenseur $\mathfrak{F}$, il s'avère utile d'introduire le tenseur des moments électrique et magnétique du milieu, en partant de (30):

$$\mathfrak{M}_{ik} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} F_{ik} - f_{ik}. \qquad (32)$$

En abrégé: $\mathfrak{M} = (\boldsymbol{M}, ic\boldsymbol{P})$. Sous forme développée, il s'écrit:

$$\mathfrak{M}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & icP_x \\ -M_z & 0 & M_x & icP_y \\ M_y & -M_x & 0 & icP_z \\ -icP_x & -icP_y & -icP_z & 0 \end{pmatrix}. \qquad (33)$$

Le fait même d'existence des tenseurs (29), (31) et (33) indique sur une liaison intime entre les couples de grandeurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{P}$.

35. Transformation des champs électrique et magnétique. La nature mathématique d'une grandeur physique étant établie, les règles de sa transformation d'un référentiel d'inertie à un autre s'obtiennent automatiquement. Les composantes des champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{P}$ sont les composantes des tenseurs (29), (31) et (33) respectivement.

Par conséquent, ces composantes se transforment suivant la règle de transformation des composantes de tenseurs. Or, cette règle est bien connue (voir Appendice, 3). Par exemple, pour les composantes F_{ik}, les formules de transformation seront comme suit:

$$F_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kl}F'_{ml}, \qquad (34)$$

où α_{im} sont les éléments de la matrice de Lorentz (II, 24), et les composantes de F_{ik} se définissent selon (29).

Faisons une remarque d'ordre purement méthodique. Souvent, les professeurs évitent dans leurs conférences l'introduction des tenseurs pour ne pas encombrer les cours. Il est en effet difficile d'expliquer en une demi-heure le sens de l'introduction des tenseurs et leurs particularités. Pourtant, le fait que le champ électromagnétique est un tenseur rend cette explication inévitable. Une question se pose: ne serait-il pas plus raisonnable d'« appeler un chat un chat » dès le début et y mettre le point ? Cependant, là il ne s'agit pas de dénominations mais des formules mêmes de transformation (34). Il est facile et convenable de les obtenir comme on le propose ci-dessous. La formule (28) montre de façon évidente que les quantités F_{ik} représentent les combinaisons linéaires des dérivées des composantes du quadrivecteur par rapport aux quadricoordon-

nées. La transformation des dérivées des composantes du vecteur lors de la transformation des coordonnées découle de l'analyse élémentaire (voir Appendice, 3). Naturellement, on obtient immédiatement les formules (34). C'est juste le temps pour « appeler un chat un chat », ayant traité, quoiqu'un peu étroitement, les composantes du tenseur de dérivées de celles du vecteur par rapport aux coordonnées.

Comment procède-t-on pour obtenir les formules de transformation des champs? En voici l'exemple pour $B_z = F_{12}/c$. La formule de transformation F_{12} selon (34) a la forme:

$$F_{12} = \alpha_{1m}\alpha_{2l}F'_{ml}. \tag{35}$$

Rappelons qu'il s'agit ici de l'addition sur deux couples d'indices indépendants m et l dont chacun varie de 1 à 4. Donc, la somme (35) inclut seize termes dont chacun contient le produit de deux α_{ik} par une des composantes de F_{ik}. Conseillons vivement au lecteur, qui rencontre pour la première fois les formules de ce type, d'écrire (une fois de la vie!) tous les seize termes. Le plus commode est de procéder comme suit. D'abord, développons la somme, mettons, suivant m, en donnant à m les valeurs de 1, 2, 3, 4. L'indice l signifie toujours la sommation. Nous obtenons la somme de quatre termes où l'indice m n'est plus présent. Ensuite, dans chacun de ces termes, procédons à la sommation sur l. Finalement, tous les seize termes seront relevés. En continuant, on substitue, dans ces termes, α_{ik} de la matrice lorentzienne (voir II,24) et les éléments de F_{ik} de (29). On découvre immédiatement que la plupart des termes de la somme (35) sont nuls. C'est pourquoi, pour (35), la sommation peut se faire de la façon beaucoup plus simple. En fait, si m varie de 1 à 4, les α_{1m} ne sont autre chose que les éléments de la première ligne de la matrice de Lorentz [voir (II,24)]; et si $l = 1, 2, 3, 4$ les α_{2l} sont les éléments de la deuxième ligne de la matrice de Lorentz. Or, dans la première ligne de la matrice [voir (II,24)] seuls les éléments α_{11} et α_{14} sont différents de zéro. Par conséquent il faut choisir pour m seules les valeurs de 1 et 4. Dans la deuxième ligne, seul l'élément α_{22} est égal à 1, tous les autres étant nuls. Ainsi, on ne prend pour l que $l = 1$ et au lieu de (35) on écrit

$$F_{12} = cB_z = \alpha_{22}\alpha_{1m}F'_{m2} = \alpha_{1m}F'_{m2} = \alpha_{11}F'_{12} +$$
$$+ \alpha_{14}F'_{42} = \Gamma\left\{cB'_z - i\frac{V}{c}(iE'_y)\right\} = \frac{cB'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Comparant la seconde et la dernière égalités dans la dernière suite d'égalités et simplifiant par c, on obtient:

$$B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y\right).$$

De façon analogue on déduit les formules de transformation des autres composantes; écrivons-les ensemble:

$$\left.\begin{array}{l} E_x = E'_x, \quad E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z), \quad E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y), \\ B_x = B'_x, \quad B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z\right), \quad B_z = \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y\right). \end{array}\right\} \quad (36)$$

Ecrivons, pour l'usage ultérieur, les formules de transformation de $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{H}$:

$$\left.\begin{array}{l} D_x = D'_x, \quad D_y = \Gamma\left(D'_y + \frac{V}{c^2}H'_z\right), \quad D_z = \Gamma\left(D'_z - \frac{V}{c^2}H'_y\right), \\ H_x = H'_x, \quad H_y = \Gamma(H'_y - VD_z), \quad H_z = \Gamma(H'_z + VD'_y). \end{array}\right\}. \quad (36')$$

Il résulte de (36) que lorsqu'on passe de K' à K les champs électrique et magnétique varient en grandeur et en direction, seules les « composantes longitudinales », celles de l'axe des x, demeurant invariables.

Décomposons les champs électrique et magnétique en composantes parallèles et perpendiculaires au mouvement (les vecteurs unitaires $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sont dirigés suivant les axes x, y, z respectivement):

$$\boldsymbol{E}_{\parallel} = E_x\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{E}_{\perp} = E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k}.$$

Ayant remarqué que le vecteur vitesse $\boldsymbol{V}$ du repère a pour composantes $(V, 0, 0)$, on arrive à:

$$\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ V & 0 & 0 \\ B'_x & B'_y & B'_z \end{vmatrix} = -\boldsymbol{j}VB'_z + \boldsymbol{k}VB'_y = V(-\boldsymbol{j}B'_z + \boldsymbol{k}B'_y), \quad (37)$$

$$\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{E}' = V(-\boldsymbol{j}E'_z + \boldsymbol{k}E'_y). \quad (38)$$

Compte tenu de (37) et (38), les formules (36) peuvent être écrites sous la forme vectorielle:

$$\boldsymbol{E}_{\parallel} = \boldsymbol{E}'_{\parallel}, \quad \boldsymbol{E}_{\perp} = \Gamma(\boldsymbol{E}'_{\perp} - \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}'), \quad (39)$$

$$\boldsymbol{B}_{\parallel} = \boldsymbol{B}'_{\parallel}, \quad \boldsymbol{B}_{\perp} = \Gamma\left(\boldsymbol{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{E}'\right). \quad (40)$$

Les transformations inverses s'obtiennent en remplaçant les grandeurs primées par celles non primées et en changeant le signe de V:

$$\boldsymbol{E}'_{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\parallel}, \quad \boldsymbol{E}'_{\perp} = \Gamma(\boldsymbol{E}_{\perp} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}), \quad (41)$$

$$\boldsymbol{B}'_{\parallel} = \boldsymbol{B}_{\parallel}, \quad \boldsymbol{B}'_{\perp} = \Gamma\left(\boldsymbol{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{E}\right). \quad (42)$$

Pour les vitesses faibles, $\Gamma \sim 1$, et l'on a de (39) et de (40):

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{B}' \times \boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}' - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{V}. \quad (43)$$

On y a introduit les notations $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\parallel}+\boldsymbol{E}_{\perp}$ et $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{\parallel}+\boldsymbol{B}_{\perp}$. On arrive aux formules de la transformation inverse de K à K' en permutant les primes et en changeant le signe de V.

Soit le champ magnétique $\boldsymbol{B}'=0$ dans le système K'. Alors, dans K, la relation entre $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ est très simple. Notons avant tout que

$$\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}_{\perp},\quad \text{car } \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}_{\parallel}=0.$$

A partir de (39) et (40), on a:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}'_{\parallel}+\Gamma\boldsymbol{E}'_{\perp};$$

$$\boldsymbol{B}=\Gamma\frac{1}{c^2}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}'=\frac{\Gamma}{c^2}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}'_{\perp}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{V}\times\Gamma\boldsymbol{E}'_{\perp}=$$

$$=\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}'_{\parallel}+\Gamma\boldsymbol{E}'_{\perp})=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}. \qquad (44)$$

Si dans K' le champ $\boldsymbol{E}'$ est égal à zéro, ou $\boldsymbol{E}=0$ dans K, alors, par analogie:

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{E}'=\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}'. \qquad (45)$$

Dans les deux cas, les champs sont orthogonaux, quel que soit le référentiel d'inertie. Les formules relativistes (39), (40), ainsi que celles approchées (43) pour les petites vitesses, montrent que si dans un des référentiels (K' par exemple) le champ électrique ou magnétique est égal à zéro, alors, dans tous les autres référentiels d'inertie ils sont perpendiculaires l'un à l'autre. Le même résultat est obtenu en utilisant les invariants de la transformation de Lorentz (voir le paragraphe 37).

Si, dans K', les champs $\boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{B}'$ sont orthogonaux, il y a toujours un tel K où soit $\boldsymbol{E}$ soit $\boldsymbol{B}$ s'annule. On peut dire immédiatement lequel des champs se réduira à zéro. Dans le paragraphe suivant, on verra que la combinaison $cB^2 - E^2$ demeure invariante par la transformation de Lorentz. Par conséquent, si, dans K', a lieu l'inégalité $cB^2 - E^2 < 0$, alors on aura le champ purement électrique. Si, au contraire, $cB^2 - E^2 > 0$, on peut obtenir le champ purement magnétique. Il découle directement de (39) et (40) comment il faut choisir le référentiel K. Choisissons la vitesse de K de façon qu'elle soit perpendiculaire à $\boldsymbol{B}'$ dans le cas où $cB'^2 - E'^2 < 0$, et perpendiculaire à $\boldsymbol{E}'$ si $cB'^2 - E'^2 > 0$. On obtient alors, pour ces cas, $\boldsymbol{B}_{\parallel}=0$ et $\boldsymbol{E}_{\parallel}=0$ respectivement. Pour que, dans le premier cas, $\boldsymbol{B}_{\perp}=0$, comme il suit de (40), il faut vérifier la condition:

$$B'_{\perp}+\frac{1}{c^2}VE'=0.$$

D'où la vitesse V du référentiel sera égale à

$$V=-\frac{c^2B'_{\perp}}{E'}. \qquad (46)$$

De façon analogue, dans le second cas, on obtient, en utilisant (39), pour la vitesse du référentiel l'expression

$$V = \frac{E'_{\perp}}{B'} . \tag{47}$$

Il est toujours possible de choisir un tel système d'inertie K où les champs électrique et magnétique soient parallèles en un point donné. Evidemment s'il existe un référentiel de ce type, il en existe une infinité qui possèdent la même propriété. En effet, dans tout référentiel d'inertie K' qui est en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à K suivant le sens commun de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$, les champs $\boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{B}'$ demeurent parallèles, car les composantes des champs dirigées le long du mouvement ne varient pas.

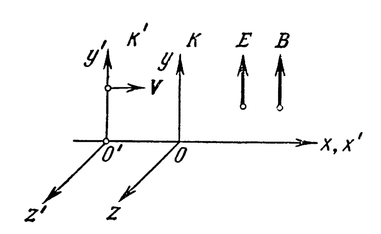


Fig. 15. Passage au système de référence K où les champs électrique et magnétique sont parallèles.

Afin de trouver ne serait-ce qu'un seul système tel que les champs soient parallèles, on procède de façon suivante. Admettons que dans le système K les champs soient parallèles, c.-à-d. $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = 0$. Dirigeons la vitesse du système K' (où $\boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{B}'$ ne sont plus parallèles) perpendiculairement aux champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$; l'axe des x, x' est pris pour la direction de la vitesse $\boldsymbol{V}$ (fig. 15). Alors, $E_x = B_x = 0$ et le produit vectoriel nul est équivalent à l'égalité $E_yB_z - E_zB_y = 0$. En portant dans cette égalité les valeurs des composantes de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ exprimées en fonction de $\boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{B}'$ selon (36), on aboutit à l'équation

$$\Gamma (E'_y + VB'_z) \Gamma \left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \right) = \Gamma (E'_z - VB'_y) \Gamma \left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z \right) .$$

Il est possible d'en déduire, d'après les champs donnés $\boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{B}'$, la vitesse V du système. Si l'on prend en considération que selon (36) $E'_x = B'_x = 0$, on arrive immédiatement à la vitesse V par rapport à $\boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{B}'$. En effet, $\boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{i}\ [E'_yB'_z - E'_zB'_y]$ et $\boldsymbol{V} = V \cdot \boldsymbol{i}$, donc on peut écrire :

$$\frac{\frac{\boldsymbol{V}}{c^2}}{1 + \frac{V^2}{c^2}} = -\frac{\boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{B}'}{c^2 B'^2 + E'^2} . \tag{48}$$

Cela étant, il est possible de trouver, d'après les vecteurs $\boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{B}'$ donnés dans K', un système K tel que $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ soient parallèles. La direction de la vitesse de ce système est la même que celle de $\boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{B}'$ et sa valeur est une des racines de l'équation quadratique (48). Evidemment, on choisit des deux racines de (48) celle pour laquelle

$V < c$. Le cas où $\boldsymbol{E}'\boldsymbol{B}' = 0$ est envisagé ci-dessus: là il n'est plus possible d'avoir les champs parallèles, en revanche, on passera soit au champ purement magnétique, soit au champ purement électrique.

Envisageons à présent les forces qui agissent sur les charges électriques dans un champ électromagnétique. Pour ne pas compliquer l'exposé, nous nous bornerons à analyser la distribution cubique de charges *). Dans le système en comouvement K' où l'élément de volume considéré est immobile avec la charge, celle-ci n'est soumise à la force que du côté du champ électrique (le champ magnétique n'influe pas sur la charge au repos). La force appliquée à la charge contenue dans l'unité de volume est appelée *densité de force*. Si la densité de charge dans le référentiel en comouvement K' est égale à ρ_0, la densité de force $\boldsymbol{f}'$ est définie par la formule

$$\boldsymbol{f}' = \rho_0 \boldsymbol{E}',$$

où $\boldsymbol{E}'$ est l'intensité du champ électrique dans K'.

Le passage à tout autre référentiel d'inertie est lié à la modification des champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$. Et si même dans le système en comouvement le champ magnétique était absent et il n'y avait que le champ électrique, dans tout autre référentiel d'inertie surgira le champ magnétique. Trouvons la densité de force $\boldsymbol{f}$ exprimée en composantes des champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ dans un référentiel d'inertie quelconque. Il est d'usage, en Electrodynamique, d'envisager le cas non relativiste où $\Gamma \sim 1$; sous cette condition, selon (17) $\rho = \rho_0\Gamma \approx \rho_0$, et selon (43) $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}$, donc

$$\boldsymbol{f}' \equiv \rho_0 \boldsymbol{E}' = \rho \{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}\}. \tag{49}$$

La dernière expression à droite de la formule (49) définit une grandeur qui, en Electrodynamique classique, est appelée *densité de force de Lorentz.* La force de Lorentz définit une force qui est appliquée à l'unité du volume contenant la charge de la part des champs électrique et magnétique dans le repère K, par rapport auquel la charge se déplace avec la vitesse $\boldsymbol{V}$. Il n'y a rien d'étonnant que la force $\boldsymbol{f}'$ dans K' s'avère égale à la force $\boldsymbol{f}$ dans K, vu que, selon (IV,38), la valeur de la force ne varie pas dans le cas non relativiste.

Bien sûr, la formule (49) est également utilisable dans le cas où la vitesse du mouvement des charges n'est pas la même en différents points d'espace. Dans ce cas, chaque élément du volume aura son propre système de référence et, par conséquent, la vitesse $\boldsymbol{V}$ varie selon les points.

Donnons encore une déduction de la force de Lorentz (49) qui sera plus explicite. Soient, dans le référentiel en comouvement K', les champs électrique et magnétique donnés par les vecteurs $\boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{B}'$.

---

*) Sur les charges ponctuelles voir l'ouvrage de Pauli *Theory of Relativity*, Pergamon press, 1958.

Décomposons ces champs en deux parties en faisant appel au principe de superposition :

$$\text{I} \quad \boldsymbol{E}'_1 = 0, \qquad \boldsymbol{B}'_1 = \boldsymbol{B},$$
$$\text{II} \quad \boldsymbol{E}'_2 = \boldsymbol{E}', \qquad \boldsymbol{B}'_2 = 0.$$

Le champ initial est évidemment la somme de deux champs $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}'_1 + \boldsymbol{E}'_2$, $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}'_1 + \boldsymbol{B}'_2$. Comme les formules I et II de transformation des champs prises séparement sont très simples, la réponse sera immédiate. Dans le système K' :

$$\boldsymbol{f}' = \rho_0 \boldsymbol{E}' = \rho \boldsymbol{E}'_2.$$

D'après la première formule (45), on a pour le champ électrique I dans le système K :

$$\boldsymbol{E}_1 = -\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}_1,$$

où $\boldsymbol{B}_1$ est le champ magnétique dans K. Selon (36), le champ électrique II dans K sera :

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}'_{2x}\boldsymbol{i} + \Gamma (E'_{2y}\boldsymbol{j} + E'_{2z}\boldsymbol{k}) \sim \boldsymbol{E}'_2$$

si $\Gamma \sim 1$. Le champ électrique résultant dans K est égal à la somme de $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}'_2 - \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}_1. \qquad (50)$$

Mais le champ $\boldsymbol{B}$ dans K est égal à $\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$ et, selon (40),

$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{\boldsymbol{V}}{c^2} \times \boldsymbol{E}.$$

Si l'on compose le produit scalaire de $\boldsymbol{B}_2$ par $\boldsymbol{V}$, on obtient une quantité proportionnelle à V^2/c^2 qu'on peut négliger dans le cas non relativiste. En conséquence, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1$ et on tire de (50) $\boldsymbol{E}'_2 = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}$; on revient alors à la force de Lorentz (49).

Lorsque, dans K, le champ électrique est nul ($\boldsymbol{E} = 0$) et le champ magnétique est différent de zéro, alors, d'après (45), $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}'$; ainsi donc, la force de Lorentz qui s'interprète dans K comme une force agissant de la part d'un champ purement magnétique, apparaît tout naturellement dans K' comme une force agissant seulement de la part d'un champ purement électrique. Ces exemples démontrent une fois de plus l'unité d'un champ électromagnétique, donc, sa décomposition en des champs électrique et magnétique est conventionnelle.

Soulignons encore une circonstance essentielle. En passant d'un référentiel d'inertie à un autre il faut être prudent dans les opérations avec les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ et ne pas oublier la signification réelle des champs. Cela concerne, en particulier, l'interprétation des lignes de champ. Les *lignes de champ* sont les notions mathématiques qui permettent parfois de parvenir aux conclusions correctes. Pour-

tant, leur existence réelle est plus que douteuse. Admettons qu'un aimant permanent se déplace dans l'espace. Cela veut-il dire, en réalité, que ce mouvement est accompagné de celui du champ magnétique de l'aimant et de ses lignes de champ ? La façon conventionnelle d'introduire les « lignes de champ » ressort déjà du fait qu'on peut toujours passer à un référentiel tel que ces dernières disparaissent. La « vitesse » du déplacement des lignes de champ est en général dépourvue de sens. Décrire le champ est de savoir ce qui se passe dans

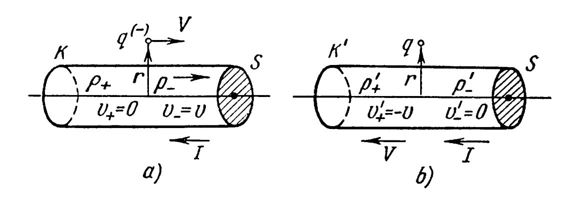


Fig. 16. Interaction de la charge q qui se déplace avec la vitesse V parallèlement au conducteur traversé par le courant avec ce dernier. *a*) Dans le référentiel K, le conducteur est immobile, et la charge et les électrons se meuvent avec la vitesse V. *b*) Dans le référentiel K', le conducteur se meut avec la vitesse V, tandis que les électrons et la charge sont au repos.

chaque point donné de l'espace. Mathématiquement parlant, tout champ se définit dans un référentiel d'inertie donné en tant que fonction des coordonnées et du temps.

Encore un exemple instructif illustrant le caractère relatif des forces agissant dans un champ électromagnétique. Soient un conducteur cylindrique traversé par le courant et une charge négative q qui se déplace parallèlement à ce conducteur avec la vitesse V (fig. 16). Le repère K est rattaché au fil, K' à la particule. Dans K, la particule est soumise à la force de Lorentz conditionnée par le champ magnétique et dirigée perpendiculairement à l'axe du cylindre ; la particule s'approche donc du conducteur. Pourtant, dans K', elle est immobile, donc libre de forces du côté du champ magnétique. D'où vient ce changement de mouvement observé de K' ?

Pour en comprendre la cause, il est nécessaire de faire appel à la description microscopique de ce qui se passe dans le conducteur. Le courant s'y forme grâce au mouvement des électrons libres, les ions positifs et les électrons liés (de valence) étant fixes dans le métal. Admettons que la densité des électrons de conduction soit égale à ρ_- et leur vitesse dans K (par rapport au conducteur) à v. La densité de charges immobiles est ρ_+ et, vu que le conducteur est neutre, $\rho_+ + \rho_- = 0$. Il s'ensuit qu'il n'engendre pas de champ électrique hors de lui et la force appliquée à la charge q ne provient que du champ magnétique :

$$\boldsymbol{F} = qV \times \boldsymbol{B}.$$

La valeur d'un champ magnétique créé par le courant rectiligne à la distance r de son axe est connue en Electrodynamique:

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

où r est la distance de l'axe dans le plan normal au courant; le vecteur $\boldsymbol{B}$ est tangent à la circonférence coplanaire de centre sur l'axe du courant. Le sens du vecteur $\boldsymbol{B}$ est défini selon la règle du tire-bouchon. Nous voyons que la force exercée sur l'électron est dirigée vers le conducteur et est égale en grandeur à

$$F=\frac{qV\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{2IqV}{r}.$$

Le courant s'exprime en fonction de la vitesse v_- des électrons de conduction, de leur densité et de l'aire S de la section transversale:

$$I=jS=\rho_- v_- S,$$

d'où

$$F=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_- S}{r}\frac{Vv}{c^2}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_+ S}{r}\frac{V^2}{c^2}, \tag{51}$$

si, pour des raisons de simplicité, on considère comme égales les vitesses des électrons dans le métal et de la particule q, c.-à-d. $V=v$.

Envisageons maintenant le même phénomène dans K'. Ici, la charge q et les électrons libres sont immobiles. A présent se meuvent par rapport à q des charges liées au conducteur et dont la densité est égale à ρ_+. Elles engendrent un certain champ magnétique B' qui n'agit pas pourtant sur la charge q, immobile dans K'. Il en découle immédiatement que dans K surgira le champ électrique, car, dans K', la charge doit également s'approcher de l'axe. Il est facile de comprendre l'origine de ce champ en se basant sur les résultats précédents. En effet, dans K' les électrons de conduction sont au repos, donc $\rho_-=\Gamma\rho'_-$ [voir (17)]. Dans K', les charges positives liées au conducteur se déplacent avec la vitesse $-V$ d'où $\rho'_+=\Gamma\rho_+$ (les mêmes charges étaient au repos dans K). Comme la densité résultante ρ' de charge dans K' est égale à $\rho'_+ + \rho'_-$, alors

$$\rho'=\frac{\rho_-}{\Gamma}+\Gamma\rho_+=\rho_+\left(\Gamma-\frac{1}{\Gamma}\right)=\Gamma\rho_+\mathrm{B}^2,$$

où $\rho_+=-\rho_-$. On comprend aisément que la formule ci-dessus coïncide avec (24). Par conséquent, le conducteur mobile est chargé positivement, la densité cubique étant égale à ρ'. Or, le champ électrique d'un cylindre uniformément chargé est défini en Electrodynamique. Il est situé dans les plans perpendiculaires à l'axe du cylindre et dirigé le long des rayons provenant de l'axe du celui-ci. Son intensité est égale à

$$E'=\frac{\rho' S}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho_+ S\Gamma\mathrm{B}^2}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Cela signifie que la force appliquée à la charge négative q est dirigée vers le conducteur et sa grandeur dans K' est égale à

$$F' = qE' = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\rho_+ S}{r} \Gamma B^2.$$

En comparant ce résultat avec (51) on voit qu'à l'approximation non relativiste ($\Gamma \sim 1$) ces forces sont égales. En ce qui concerne la transformation des forces (IV, 38), nous découvrons que les deux procédés visant à la description du phénomène observé apportent

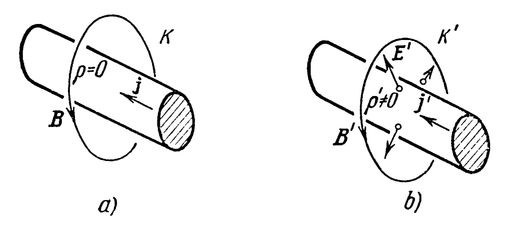


Fig. 17. *a*) Dans le référentiel K, la densité de charges ρ ($\rho = \rho_+ + \rho_-$) est nulle, tandis que la densité de courant diffère de zéro et est égale à $\boldsymbol{j}$. Le champ électrique est donc absent et il n'existe que le champ magnétique $\boldsymbol{B}$. *b*) Dans le référentiel K', il surgit la densité de charges ρ' et celle de courant devient égale à $\boldsymbol{j}'$. Le champ magnétique $\boldsymbol{B}'$ est alors accompagné du champ électrique $\boldsymbol{E}'$.

les mêmes résultats quelle que soit la vitesse V. Les résultats concernant les champs dans les repères K et K' sont représentés sur la fig. 17.

Notons en conclusion que tous les résultats concernant les forces appliquées aux charges volumiques du côté d'un champ électromagnétique sont faciles à obtenir si la densité de force de Lorentz (49)

$$\boldsymbol{f} = \rho \; \{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\}$$

est écrite sous forme quadridimensionnelle. Pour y parvenir, présentons la $x^{\text{ième}}$ composante de la force de Lorentz comme suit:

$$f_1 = \rho E_x + \rho v_y B_z - \rho v_z B_y = \left(-\frac{is_4}{c}\right) iF_{14} +$$
$$+ s_2 \frac{F_{12}}{c} + s_3 \left(-\frac{F_{13}}{c}\right) = \frac{1}{c}\left(F_{12}s_2 + F_{13}s_3 + F_{14}s_4\right) = \frac{1}{c} F_{1k}s_k.$$

Dans cette suite d'égalités on tient compte de ce que

$$\rho = -\frac{i}{c} s_4, \quad \rho v_y = s_2, \quad \rho v_z = s_3,$$
$$B_z = \frac{F_{12}}{c}, \quad B_y = -\frac{F_{13}}{c}, \quad F_{11} = 0.$$

Les expressions analogues s'obtiennent pour $f_y = f_2$ et $f_z = f_3$. D'où vient que le quadrivecteur force $\vec{\mathscr{K}}$ qui est appliqué à la charge

dans un champ électromagnétique a pour composantes:

$$\mathcal{K}_i = \frac{1}{c} F_{ik} s_k. \qquad (52)$$

Les trois premières composantes de la densité, comme on vient de voir, donnent une expression tridimensionnelle usuelle (49). Recherchons la quatrième composante:

$$\mathcal{K}_4 = \frac{1}{c} F_{4k} s_k = \frac{1}{c} (F_{41} s_1 + F_{42} s_2 + F_{45} s_3) = \frac{i\rho}{c} (\boldsymbol{vE}).$$

La quantité $\rho(\boldsymbol{vE})$ est d'une signification bien simple qui ressort immédiatement si l'on multiplie scalairement les deux membres de l'égalité (49) par $\boldsymbol{v}$. Vu que $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{Bv} = 0$, on obtient

$$(\boldsymbol{fv}) = \rho (\boldsymbol{vE}).$$

Le premier membre de la dernière égalité représente la puissance de la force de Lorentz par unité de volume (les forces appliquées du côté d'un champ magnétique ne fournissent pas de travail):

$$\mathcal{K}_4 = \frac{i}{c} (\boldsymbol{fv}). \qquad (53)$$

Ainsi donc, on parvient au quadrivecteur densité de force, dont les composantes s'inscrivent ensemble:

$$\vec{\mathcal{K}} \left\{ f_x, f_y, f_z, \frac{i}{c} (\boldsymbol{fv}) \right\}. \qquad (54)$$

Or, la division des forces agissant sur la charge de la part des champs électrique et magnétique en $\rho\boldsymbol{E}$ et $\rho\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ est conventionnelle. Elles forment un ensemble et fusionnent tout naturellement en une seule expression quadridimensionnelle (52).

En conclusion, écrivons les équations du mouvement de la charge sous forme quadridimensionnelle:

$$\frac{d}{d\tau} (m_0 u_i) = \frac{1}{c} F_{ik} s_k.$$

Cette forme est largement employée.

36. Transformation des moments électrique et magnétique. Passons enfin aux formules de transformation des moments électrique et magnétique qui découlent de la fusion de ces grandeurs en un seul tenseur antisymétrique (33).

Soient $\boldsymbol{P}^0$ et $\boldsymbol{M}^0$ la polarisation et l'aimantation mesurées par l'observateur se déplaçant avec le milieu électrisé ou aimanté (ou tout simplement le milieu est immobile par rapport au laboratoire). Pour l'observateur, par rapport auquel le milieu a la vitesse V, on

obtient :

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_x^0, \quad M_y = \Gamma(M_y^0 + VP_z^0), \quad M_z = \Gamma(M_z^0 - VP_y^0), \\ P_x &= P_x^0, \quad P_y = \Gamma\left(P_y^0 - \frac{V}{c}M_z^0\right), \quad P_z = \Gamma\left(P_z^0 + \frac{V}{c^2}M_y^0\right). \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Ces formules rendent claire la relation entre les vecteurs tridimensionnels $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{M}$ introduits précédemment. Tout ce qu'on a dit au sujet de la relation entre les champs électrique et magnétique peut s'y rapporter. En règle générale, l'aimantation s'accompagne toujours de la polarisation et réciproquement. Toutefois, par un choix convenable du repère, on peut réduire à zéro soit $\boldsymbol{P}$, soit $\boldsymbol{M}$. S'il y a un corps polarisé mais non aimanté, il devient non seulement polarisé mais aussi aimanté du point de vue de l'observateur, par rapport auquel le corps est en mouvement. En effet, supposons que, dans le repère K' où le corps est au repos, on ait :

$$\boldsymbol{M}^0 = 0, \quad \boldsymbol{P}^0(P_x^0, P_y^0, P_z^0).$$

Dans le repère K où le corps se déplace avec la vitesse V, on a alors :

$$\begin{aligned} P_x &= P_x^0, \quad P_y = \Gamma P_y^0, \quad P_z = \Gamma P_z^0, \\ M_x &= 0, \quad M_y = \Gamma V P_z^0, \quad M_z = -\Gamma V P_y^0. \end{aligned}$$

Par conséquent, dans K le corps est aimanté. Si la vitesse du corps est non relativiste, c.-à-d. si $\frac{V}{c} \ll 1$ et $\Gamma \sim 1$, alors

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^0, \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}^0 \times \boldsymbol{V}.$$

Par contre, si dans le système K' où le corps est au repos, on a

$$\boldsymbol{P}^0 = 0, \quad \boldsymbol{M}^0(M_x^0, M_y^0, M_z^0),$$

alors pour le système K où le corps se déplace avec la vitesse V on obtient

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_x^0, \quad M_y = \Gamma M_y^0, \quad M_z = \Gamma M_z^0, \\ P_x &= P_x^0, \quad P_y = -\Gamma\frac{V}{c^2}M_z^0, \quad P_z = \Gamma\frac{V}{c^2}M_y^0. \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Ainsi, le corps est également polarisé dans le système K. Si la vitesse du corps est non relativiste, on a

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^0, \quad \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{M}^0 \times \frac{\boldsymbol{V}}{c^2}.$$

Cela veut dire, en particulier, qu'un aimant permanent mobile a un moment électrique.

Voici un exemple illustrant ces conclusions. Soit un contour rectangulaire $ABCD$, traversé par le courant de densité j, qui se déplace

dans le repère K à la vitesse V. Rattachons-y le repère K' (fig. 18). Il vient alors, selon les formules (24), que sur les côtés BC et AD apparaissent $\rho > 0$ et $\rho < 0$ respectivement. La charge totale portée par ce contour est évidemment nulle. Cependant, le contour possède le moment électrique dirigé suivant l'axe des y. Montrons qu'un calcul élémentaire conduit aux conclusions de la Relativité restreinte. Si, dans K', le moment dipolaire fait défaut et il n'y a que la composante M_z, il se crée dans K d'après (56) $P_y = -\frac{V}{c^2}\Gamma M_z^0$. Dans le système K', le courant rectangulaire $ABCD$ possède le moment magnétique $\boldsymbol{IS}$ où $\boldsymbol{S}$ est dirigé dans le sens de l'axe négatif des z, son module étant égal à ab où a et b sont les côtés du contour rectangulaire. Ainsi donc, $M_z^0 = -j^0 ab$ (pour les raisons de simplicité, la section du conducteur est posée égale à l'unité). On tire aisément le moment dipolaire apparu dans le contour. D'après (24), $\rho = \Gamma\frac{V}{c^2}j_x^0$, BC et AD sont distants de b et la charge totale accumulée sur ces côtés est égale à ρa. La direction du moment dipolaire coïncide avec celle de l'axe des y. Finalement, $P_y = \rho ab = \Gamma\frac{V}{c^2}abj_x^0 = -\frac{V}{c^2}\Gamma M_z^0$, ce qu'on doit avoir.

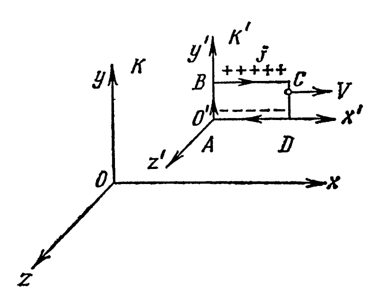


Fig. 18. Apparition du moment dipolaire du courant circulant dans le cadre qui se déplace par rapport au système de référence K.

37. Invariants d'un champ électromagnétique. Certaines combinaisons des champs électrique et magnétique demeurent invariants par la transformation de Lorentz, bien que l'intensité du champ électrique $\boldsymbol{E}$ et l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ ne le soient pas. Lesdites combinaisons sont les invariants du 4-tenseur antisymétrique du deuxième ordre. En voici deux invariants (voir Appendice, 6):

$$I_1 = F_{ik}^2, \tag{57}$$

$$I_2 = F_{ik}F_{ik}^* = \frac{1}{2}e_{iklm}F_{ik}F_{lm}. \tag{58}$$

Compte tenu des définitions des tenseurs F_{ik} et F_{ik}^* (voir plus loin, p. 168)

$$\mathfrak{F}\,(c\boldsymbol{B},\ -i\boldsymbol{E}),\qquad \mathfrak{F}^*\,(-i\boldsymbol{E},\ c\boldsymbol{B}),$$

et comme le premier invariant représente la somme des carrés de toutes les composantes F_{ik} et le second invariant les produits des composantes correspondantes des tenseurs F_{ik} et F_{ik}^*, nous écrivons

immédiatement

$$I_1 = 2(c^2B^2 - E^2), \quad I_2 = -2ic(\boldsymbol{BE}). \tag{59}$$

En omettant les facteurs constants non essentiels, nous pouvons constater que le champ électromagnétique possède deux invariants (les invariants du tenseur $\mathfrak{F}$ et les invariants mixtes de $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{f}$ ne nous intéressent pas) :

$$I_1 = c^2B^2 - E^2, \quad I_2 = \boldsymbol{BE}.$$

Ces deux invariants entraînent les résultats suivants en partie déjà cités plus haut. Si, dans un référentiel d'inertie quelconque, les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ sont orthogonaux ($\boldsymbol{EB} = 0$), ils le seront dans tout autre référentiel. Si, dans un référentiel $E = cB$, cette relation se conserve dans tous les autres systèmes de référence.

Signalons tout de suite que ces invariants sont nuls pour une onde lumineuse dans le vide. Les propriétés $\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{E}$, $cB = E$ demeurent sans modification quel que soit le référentiel d'inertie.

Il est clair que si $I_2 = 0$ et $I_1 \neq 0$, il existe alors un repère tel que soit $\boldsymbol{E} = 0$, soit $\boldsymbol{B} = 0$ (en fonction du signe de I_1), c.-à-d. on peut avoir soit le champ purement magnétique, soit le champ purement électrique. Le réciproque est aussi vrai : si, dans un référentiel quelconque, $\boldsymbol{E}$ ou $\boldsymbol{B}$ est nul, dans tous les autres référentiels $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ sont orthogonaux. Notons que la quantité $\boldsymbol{BE}$ n'est pas un « vrai » scalaire puisqu'elle change le signe lors du passage du système de coordonnées de gauche à celui de droite et vice versa. C'est la quantité $(\boldsymbol{BE})^2$ qui est un vrai scalaire.

38. Quelques problèmes sur la transformation d'un champ électromagnétique. Champ de la charge en mouvement uniforme. Les champs magnétique et électrique de la charge en mouvement uniforme s'obtiennent aisément par la transformation des champs du repère K' où la charge est au repos. Si la charge ponctuelle e est au repos dans le système K', elle crée le champ électrostatique. Du point de vue du repère K se déplaçant avec la vitesse V par rapport à K', cette charge représente le courant rectiligne. Le spectre du champ magnétique de celui-ci est représenté par des cercles concentriques dont les centres sont situés sur le courant ; les plans de ces cercles sont perpendiculaires à la direction du courant.

Les formules de transformation des champs conduisent aux mêmes résultats. Cela se démontre aisément. Soit une charge ponctuelle placée à l'origine du système K'. Celui-ci sera alors caractérisé par :

$$\boldsymbol{B}' = 0, \quad \boldsymbol{E}' = \frac{e}{4\pi\varepsilon}\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3} \tag{60}$$

ou en projections sur les axes de coordonnées

$$\left.\begin{array}{l} B'_x=0, \quad B'_y=0, \quad B'_z=0, \\ E'_x=\frac{e}{4\pi\varepsilon}\frac{x'}{r'^3}, \quad E'_y=\frac{e}{4\pi\varepsilon}\frac{y'}{r'^3}, \quad E'_z=\frac{e}{4\pi\varepsilon}\frac{z'}{r'^3}, \end{array}\right\} \qquad (61)$$

où

$$r'^2=x'^2+y'^2+z'^2.$$

Conformément à (36), on a pour le système K:

$$E_x=E'_x, \quad E_y=\Gamma E'_y, \quad E_z=\Gamma E'_z, \qquad (62)$$

$$B_x=B'_x=0, \quad B_y=-\Gamma\frac{V}{c^2}E'_z, \quad B_z=\Gamma\frac{V}{c^2}E'_y. \qquad (63)$$

Comme $B_x=0$, le champ magnétique est situé dans le repère K dans les plans perpendiculaires à l'axe des x, c.-à-d. dans les plans perpendiculaires au sens du courant. Les équations des lignes de force du champ magnétique ont dans K la forme suivante:

$$\frac{dy}{B_y}=\frac{dz}{B_z}$$

ou

$$\frac{dy}{dz}=\frac{B_y}{B_z}.$$

Compte tenu de (63), on a

$$\frac{B_y}{B_z}=-\frac{E'_z}{E'_y}=-\frac{z'}{y'}=-\frac{z}{y},$$

puisque $z'=z$, $y'=y$ selon la transformation de Lorentz. L'équation des lignes de force s'écrira par conséquent:

$$\frac{dy}{dz}=-\frac{z}{y}$$

ou

$$y\,dy+z\,dz=0,$$

soit

$$d\,(x^2+y^2)=0.$$

La première intégrale en est l'équation de la circonférence:

$$y^2+z^2=\text{const}.$$

Ainsi donc, les lignes de force sont des cercles de centre sur l'axe du courant.

On arrive au même résultat en transformant les potentiels. Nous allons procéder à ce calcul qui permettra en outre d'avoir d'autres résultats utiles. Le potentiel scalaire du système K' a pour expression

$$\varphi'=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e}{r'}=\frac{c}{i}\Phi'_4,$$

le potentiel vecteur A' étant nul: $A' = 0$. Si, dans le système K', le 4-potentiel $\vec{\Phi}$ a pour composantes $\left(A', \frac{i}{c}\varphi'\right)$, alors d'après (14) on a pour le système K:

$$\Phi_1 = \Gamma\left(\Phi_1' - i\frac{V}{c}\Phi_4'\right), \quad \Phi_2 = \Phi_2', \quad \Phi_3 = \Phi_3', \quad \Phi_4 = \Gamma\left(\Phi_4' + i\frac{V}{c}\Phi_1'\right).$$

Substituant les valeurs des composantes du 4-potentiel du système K', on a:

$$A_1 = \Gamma\left(-i\frac{V}{c}\frac{i}{c}\varphi'\right) = \Gamma\frac{V}{c^2}\varphi', \quad A_2 = 0, \; A_3 = 0, \quad \frac{i}{c}\varphi = \Gamma\frac{i}{c}\varphi'.$$

De cette façon,

$$A = \frac{V}{c^2}\Gamma\varphi' = \frac{V}{c^2}\varphi, \qquad \varphi = \Gamma\varphi'. \tag{64}$$

Exprimons maintenant r' faisant partie de φ' en coordonnées de la charge dans le système K. En vertu de la transformation de Lorentz

$$x' = \Gamma(x - Vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \tag{65}$$

et la formule de r'^2 s'écrira ainsi:

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \Gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 =$$

$$= \Gamma^2\left\{(x - Vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\Gamma^2}\right\} = \Gamma^2\Re^2, \quad r' = \Gamma\Re, \tag{66}$$

où

$$\Re^2 = (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2). \tag{67}$$

En utilisant (67), nous pouvons exprimer le potentiel scalaire φ, défini par (64), au moyen de $\Re$:

$$\varphi = \Gamma\varphi' = \Gamma\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e}{r'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e}{\Re}, \tag{68}$$

et représenter le potentiel vecteur A sous la forme

$$A = \frac{V}{c^2}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{eV}{c^2\Re}. \tag{69}$$

Récrivons les expressions des composantes du champ $\boldsymbol{E}$, compte tenu de (62), (65) et (66):

$$E_x = \frac{e(x - Vt)}{\Gamma^2 4\pi\varepsilon\Re^3}, \quad E_y = \frac{ey}{\Gamma^2 4\pi\varepsilon\Re^3}, \quad E_z = \frac{ez}{\Gamma^2 4\pi\varepsilon\Re^3}. \tag{70}$$

La charge est placée à l'origine O' (au point $x' = 0$) du système K'. Ses coordonnées dans le système K sont: $x_0 = Vt$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Introduisons un vecteur $\boldsymbol{R}$ issu du point O' où se trouve la charge et dirigé vers le point d'observation A de coordonnées (x, y, z)

(fig. 19). Ce vecteur s'écrit:

$$\boldsymbol{R} = (x - Vt)\,\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{71}$$

où $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sont les vecteurs unitaires colinéaires aux axes des x, y, z

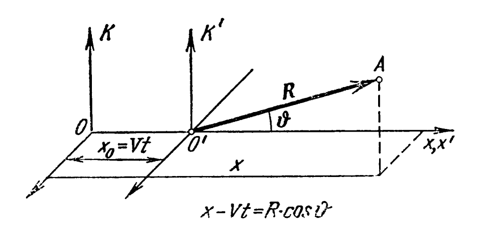


Fig. 19. Sur le calcul des champs électrique et magnétique d'une charge en mouvement uniforme.

respectivement. Le produit des composantes (70) par $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ respectivement donne

$$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e}{\Gamma^2}\frac{\boldsymbol{R}}{\mathfrak{R}^3}\,. \tag{72}$$

En utilisant l'angle ϑ entre la direction du mouvement de la charge (c.-à-d. l'axe des x) et le rayon vecteur $\boldsymbol{R}$, on a:

$$\left.\begin{aligned} x - Vt &= R\cos\vartheta,\\ R^2 &= R^2\cos^2\vartheta + y^2 + z^2 \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

et par conséquent:

$$y^2 + z^2 = R^2\sin^2\vartheta. \tag{74}$$

Compte tenu de (71) et (74), on peut récrire l'égalité (67) sous la forme

$$\mathfrak{R}^2 = R^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right), \tag{75}$$

après quoi l'expression de $\boldsymbol{E}$ peut s'écrire finalement:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e\boldsymbol{R}}{R^3}\frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right)^{3/2}}\,. \tag{76}$$

Le champ électrique d'une charge mobile (76) est une fonction des variables très commodes, à savoir: la distance R de la charge mobile et l'angle ϑ entre la direction du point où l'on cherche le champ et la direction du mouvement de la charge. Pour R fixe, la valeur minimale du champ est située sur la direction du mouvement

de la charge ($\vartheta = 0, \pi$):

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{e}{R^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right), \tag{77}$$

et la valeur maximale du champ est obtenue sur la direction perpendiculaire à celle du mouvement $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{e}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{78}$$

L'intensité du champ dépend de la vitesse de la charge. Avec l'accroissement de la vitesse $E_{\parallel}$ diminue tandis que $E_{\perp}$ augmente. Le champ d'une charge rapide se concentre dans une marge étroite des angles voisins de $\vartheta \sim \frac{\pi}{2}$ ($V \sin \vartheta / c \sim 1$).

En ce qui concerne le champ magnétique d'une charge en mouvement qui est nul ($\boldsymbol{B}' = 0$) dans K', on le détermine dans le système K selon la formule (44):

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{E}. \tag{79}$$

Pour les faibles vitesses de la charge, l'approximation donne dans le vide

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e\boldsymbol{R}}{R^3}$$

et le champ magnétique est

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{e\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{R}}{R^3}. \tag{80}$$

L'expression (80) n'est autre que la *loi de Biot et Savart.*

Envisageons un exemple intéressant. Soient deux charges e_1 et e_2 se déplaçant à la même vitesse V parallèlement l'une à l'autre. Trouvons leur force d'interaction dans le système par rapport auquel elles se meuvent. Nommons-le K. Rattachons aux charges le repère K' où elles sont au repos. Déterminons la force appliquée à la charge e_1. Celle-ci est soumise à l'action des champs électrique et magnétique créés par la charge e_2. La force exercée sur la charge e_1 est celle de Lorentz: $\boldsymbol{F}_1 = e_1 \{\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}_2\}$. Tenant compte de (79), on peut écrire:

$$\boldsymbol{F}_1 = e_1\boldsymbol{E}_2 + \frac{e_1}{c^2} \boldsymbol{V} \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{E}_2) = e_1\boldsymbol{E}_2 + \frac{e_1}{c^2} \boldsymbol{V} (\boldsymbol{V}\boldsymbol{E}_2) - \frac{e_1}{c^2} V^2 \boldsymbol{E}_2 =$$

$$= e_1 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \boldsymbol{E}_2 + \frac{e_1}{c^2} \boldsymbol{V} (\boldsymbol{V}\boldsymbol{E}_2). \tag{81}$$

$\boldsymbol{E}_2$ s'exprime par (76) où $\boldsymbol{R}$ est le rayon vecteur mené de la charge e_2 à la charge e_1 et ϑ l'angle entre $\boldsymbol{R}$ et la vitesse $\boldsymbol{V}$ des charges.

Portant (76) dans (81) on obtient

$$\boldsymbol{F}_1=\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon R^3}\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2\boldsymbol{R}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right)^{3/2}}+\frac{e_1e_2\boldsymbol{V}V\cos\vartheta\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}{4\pi\varepsilon c^2R^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon R^2}\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right)^{3/2}}\left\{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}+\frac{\boldsymbol{V}V}{c^2}\cos\vartheta\right\}, \qquad (82)$$

d'où on a pour la composante suivant la direction du mouvement:

$$\boldsymbol{F}_x=\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon R^2}\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\cos\vartheta}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right)^{3/2}}, \qquad (83)$$

et pour la composante qui lui est perpendiculaire:

$$\boldsymbol{F}_y=\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon R^2}\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2\sin\vartheta}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right)^{3/2}}. \qquad (84)$$

Considérons deux charges situées sur la droite parallèle à l'axe des y. Supposons que l'une des charges se trouve sur l'axe des x de sorte que la distance de deux charges est égale à y. Alors $\vartheta=\frac{\pi}{2}$. Les formules (83) et (84) se simplifient: $F_x=0$ et

$$F_y=\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon y^2}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \qquad (85)$$

La formule (85) est facilement retrouvée de la transformation de la force qu'exercent les charges immobiles l'une sur l'autre dans le repère K', en force du repère K à l'aide des formules (IV, 38). Conformément à (85), il y a les forces de répulsion entre les charges e_1 et e_2 dans le repère K aussi. Mais du point de vue du système K, deux charges e_1 et e_2 qui se déplacent parallèlement l'une à l'autre représentent deux courants parallèles de même sens. Ces derniers doivent s'attirer en raison de la loi d'Ampère. Où est donc la vérité? Ecrivons tout d'abord la loi d'Ampère pour deux éléments de courant $e_1\boldsymbol{V}$ et $e_2\boldsymbol{V}$ dans le vide:

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\boldsymbol{V}\times(e_2\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{R})}{R^3}=\frac{\mu_0e_1e_2}{4\pi}\frac{\boldsymbol{V}\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{R})}{R^3}=-\frac{\mu_0e_1e_2}{4\pi}V^2\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}.$$

Mais $\boldsymbol{R}=y\boldsymbol{j}$, par conséquent:

$$F_y=-\frac{\mu_0e_1e_2}{4\pi y^2}V^2. \qquad (86)$$

Ce résultat découle de la formule (85) pour le cas de petits V/c. En effet,

$$F_y \approx \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 y^2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}+\ldots\right)=\frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 y^2}-\frac{e_1 e_2}{4\pi y^2}\mu_0\frac{V^2}{2}, \qquad (87)$$

puisque $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. La force (87), observée dans le système de référence K où les charges sont en mouvement, se compose de deux parties dont l'une est la force de Coulomb (répulsion) et l'autre, l'interaction d'Ampère (attraction). Mais cette dernière est une grandeur du deuxième ordre de petitesse par rapport à la répulsion. L'attraction observée est due au fait que les conducteurs ne sont pas chargés et la force électrostatique de répulsion est réduite à zéro.

39. Equations de Maxwell en formalisme quadridimensionnel. On a obtenu les formules de transformation des champs électrique et magnétique lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre. Mais on doit connaître les champs dans un système quelconque. On fait alors appel aux équations de Maxwell. Celles-ci doivent se conserver dans tous les référentiels en vertu du principe de l'équivalence des référentiels d'inertie. Pratiquement cela est vérifié mais devient plus évident lorsqu'on présente ces équations sous forme quadridimensionnelle. C'est ce qu'on fera dans ce qui suit. Ecrivons le système fondamental des équations de Maxwell:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\dot{\boldsymbol{D}}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{D}=\rho, \qquad (88)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\dot{\boldsymbol{B}}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0. \qquad (89)$$

Nous avons sciemment divisé les équations en deux lignes en réunissant les équations des champs moyens, électrique et magnétique, $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ et celles des vecteurs auxiliaires $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{D}$ respectivement.

Pour mettre les équations (88) et (89) sous forme quadridimensionnelle, on fera appel aux tenseurs (29) et (31). On utilisera également la définition du quadrivecteur densité de courant (7). Notons aussi la relation (pour le vide) qui nous sera utile par la suite:

$$\mathfrak{F}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\mathfrak{f}. \qquad (90)$$

Les équations (88) doivent évidemment s'exprimer au moyen du tenseur (31) et de la 4-densité de courant, tandis que (89) au moyen du tenseur (29). On écrira les équations quadridimensionnelles sans démonstration et on verra qu'elles coïncident avec (88) et (89).

Le couple d'équations de Maxwell (88) se présente sous la forme

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k}=s_i \quad (i=1,\,2,\,3,\,4;\ \text{la sommation sur } k), \qquad (91)$$

où s_i sont les composantes du quadrivecteur courant [voir (7)]. Il y en a en tout quatre équations. Le couple d'équations (89) s'exprime au moyen du tenseur F^*_{ik} qui est dual du tenseur F_{ik} (voir Appendice, 6):

$$F^*_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm} F_{lm}, \tag{92}$$

où e_{iklm} est le tenseur unitaire du quatrième ordre complètement antisymétrique. On voit aisément que le tenseur dual F^*_{ik} s'obtient du tenseur F_{ik} par la permutation des composantes des parties imaginaire et réelle:

$$\mathfrak{F} = (c\boldsymbol{B}, -i\boldsymbol{E}), \quad \mathfrak{F}^* = (-i\boldsymbol{E}, c\boldsymbol{B}),$$

$$F^*_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & cB_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & cB_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & cB_z \\ -cB_x & -cB_y & -cB_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{93}$$

En utilisant ce tenseur, on peut mettre le couple d'équations de Maxwell (89) sous forme quadridimensionnelle de la façon suivante:

$$\frac{\partial F^*_{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{94}$$

Il est souvent d'usage d'exprimer les équations (89) directement au moyen du tenseur F_{ik}. Cette écriture est donnée ici, car nous en aurons besoin par la suite. Il est donc possible d'écrire les équations (89) sous forme de (94) et de l'équation

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0. \tag{94'}$$

Il n'y a pas de sommation dans (94′). Parmi quatre valeurs possibles de i, k, l, on choisit trois valeurs différentes [le lecteur verra que si l'on en choisit deux indices identiques, alors, compte tenu de l'antisymétrie du tenseur F ($F_{ik} = -F_{ki}$), la relation (94′) se ramène à l'identité]. La structure de (94′) montre que la répartition des trois nombres choisis entre les indices i, k, l n'est pas essentielle. Cela signifie que (94′) inclut en réalité les équations indépendantes en un nombre égal à celui des combinaisons de quatre indices trois à trois $C_4^3 = C_4^1 = 4$.

Vérifions si (91) et (94) comprennent les équations de Maxwell (88) et (89). Analysons l'équation (91) pour l'indice $i = 1$:

$$\frac{\partial f_{1k}}{\partial x_k} = \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} = s_1,$$

soit

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial (icD_x)}{\partial (ict)} = j_x.$$

On vient d'obtenir la composante x de l'équation rot $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \dot{\boldsymbol{D}}$. Les deux autres composantes découlent de (91) en posant $i = 2$ et $i = 3$. Si $i = 4$, pour l'équation (91) on a :

$$\frac{\partial f_{4k}}{\partial x_k} = \frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{44}}{\partial x_4} = \frac{\partial (icD_x)}{\partial x} + \frac{\partial (icD_y)}{\partial y} + \frac{\partial (icD_z)}{\partial z} = s_1 \equiv ic\rho,$$

soit

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho.$$

Ainsi, (91) contient l'équation (88).

L'équation (94) réunit, elle aussi, quatre équations ($i = 1, 2, 3, 4$). Considérons, à titre d'exemple, l'équation pour $i = 1$:

$$\frac{\partial F^*_{1k}}{\partial x_k} = \frac{\partial F^*_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^*_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^*_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F^*_{14}}{\partial x_4} = -i\,\frac{\partial E_z}{\partial y} + i\,\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial (cB_x)}{\partial (ict)} = 0,$$

soit

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \text{c.-à-d.}\ (\operatorname{rot} \boldsymbol{E})_x = -(\dot{\boldsymbol{B}})_x.$$

Deux autres composantes de l'équation rot $\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}$ s'obtiennent de l'équation (94) pour $i = 2, 3$. Il ne reste que l'équation avec $i = 4$:

$$\frac{\partial F^*_{4k}}{\partial x_k} = \frac{\partial F^*_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F^*_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F^*_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F^*_{44}}{\partial x_4} = -\frac{\partial (cB_x)}{\partial x} - \frac{\partial (cB_y)}{\partial y} - \frac{\partial (cB_z)}{\partial z} = 0.$$

C'est la seconde équation de (89) : div $\boldsymbol{B} = 0$. On a donc prouvé que (94) contient les équations de Maxwell (89). Le lecteur peut se convaincre lui-même que (94′) fournit, de façon analogue, l'équation (89).

La covariance des équations de Maxwell découle immédiatement de leur présentation par les formules (91) et (94). En effet, (91) est une relation covariante entre deux vecteurs (voir Appendice, 5). L'équation (94) relie les composantes du tenseur du troisième ordre et (94′) n'est autre que la 4-divergence dont l'invariance est démontrée en Appendice. Nous espérons que le lecteur confrontera ces résultats avec ce qui est dit sur la covariance de l'équation quadridimensionnelle de la dynamique au chapitre IV, page 96.

40. Transformations des équations « matérielles ». Les équations de Maxwell deviennent fermées si l'on y joint les équations « matérielles » qui décrivent un milieu où les phénomènes électromagnétiques ont lieu. Appelons le système où le milieu (ou une partie de milieu) est immobile système *en comouvement*. Les équations matérielles du milieu homogène et isotrope s'écrivent dans ce système :

$$\boldsymbol{D}' = \varepsilon \boldsymbol{E}', \tag{95}$$

$$\boldsymbol{B}' = \mu \boldsymbol{H}', \tag{96}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}', \tag{97}$$

où la constante diélectrique ε, la perméabilité μ et la conductibilité σ sont des constantes.

Les formules de transformation des vecteurs $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{D}$ étant connues, nous établissons la relation entre eux dans tout référentiel d'inertie autre que K'. Ecrivons les formules nécessaires de la transformation en les décomposant en parties longitudinale et transversale (relativement à la vitesse $\boldsymbol{V}$ du repère) :

$$\boldsymbol{E}'_{\parallel} = (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B})_{\parallel}, \qquad \boldsymbol{E}'_{\perp} = \Gamma (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B})_{\perp}, \tag{98}$$

$$\boldsymbol{B}'_{\parallel} = \left(\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2} \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{E}\right)_{\parallel}, \qquad \boldsymbol{B}'_{\perp} = \Gamma \left(\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2} \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{E}\right)_{\perp}, \tag{99}$$

$$\boldsymbol{D}'_{\parallel} = \left(\boldsymbol{D} + \frac{1}{c^2} \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{H}\right)_{\parallel}, \qquad \boldsymbol{D}'_{\perp} = \Gamma \left(\boldsymbol{D} + \frac{1}{c^2} \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{H}\right)_{\perp}, \tag{100}$$

$$\boldsymbol{H}'_{\parallel} = (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{D})_{\parallel}, \qquad \boldsymbol{H}'_{\perp} = \Gamma (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{D})_{\perp}. \tag{101}$$

Il ne faut pas y oublier que toutes les expressions du type $(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{A})_{\parallel}$ sont nulles pour tout $\boldsymbol{A}$, puisqu'on considère la projection sur la direction de $\boldsymbol{V}$, et le produit vectoriel est perpendiculaire à la vitesse. Si l'on porte des expressions correspondantes dans (95) et (96), on vient, tant pour les composantes longitudinales que pour les composantes transversales (pour lesquelles le facteur Γ est simplifié), aux expressions identiques qui se rassemblent de la façon suivante :

$$\boldsymbol{D} + \frac{1}{c^2} \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{H} = \varepsilon (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}), \tag{102}$$

$$\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2} \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{E} = \mu (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{D}). \tag{103}$$

Nous voyons les champs s'interpénétrer : chacune de ces équations (102) et (103) contient tous les quatre vecteurs. L'élimination de $\boldsymbol{B}$ ou de $\boldsymbol{D}$ des équations (102) et (103) permet d'obtenir les relations entre trois autres vecteurs. Les équations exprimées séparément en composantes longitudinales et transversales semblent plus simples :

$$\boldsymbol{D}_{\parallel} = \varepsilon \boldsymbol{E}_{\parallel}, \quad \boldsymbol{B}_{\parallel} = \mu \boldsymbol{H}_{\parallel}, \tag{104}$$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \frac{V^2}{c^2}\right) \boldsymbol{D}_{\perp} = \varepsilon \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \boldsymbol{E}_{\perp} + (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0)\, \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{H}, \tag{105}$$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \frac{V^2}{c^2}\right) \boldsymbol{B}_{\perp} = \mu \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \boldsymbol{H}_{\perp} + (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0)\, \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{E}. \tag{106}$$

Ces formules montrent que si, dans le système en comouvement K' (milieu isotrope), les vecteurs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$, ainsi que $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$, sont colinéaires, ils ne le sont plus dans d'autres systèmes.

Cette transformation s'obtient par une autre méthode que nous allons envisager. Les équations matérielles (95), (96) et (97) peuvent se présenter sous forme tensorielle. Nous les écrivons pour vérifier ensuite que, dans le système de référence où le corps est au

repos, on revient aux mêmes formules (95), (96) et (97). Introduisons à cet effet la vitesse quadridimensionnelle $\vec{V}\,(\Gamma V,\ ic\Gamma)$ du corps (milieu) où Γ est dû au fait que la vitesse V du milieu est égale à celle du système K'. La 4-vitesse $\vec{V}'$ dans le système K' a pour composantes $U'_1 = 0$, $U'_2 = 0$, $U'_3 = 0$, $U'_4 = ic$.

Il est facile de montrer que les équations tensorielles

$$\frac{1}{c} f_{ik}U_k = \varepsilon F_{ik}U_k, \tag{107}$$

$$\frac{1}{c}\,(F_{ik}U_l + F_{kl}U_i + F_{li}U_k) = \mu\,(f_{ik}U_l + f_{kl}U_i + f_{li}U_k), \tag{108}$$

$$s_i = \frac{\sigma}{c} F_{ik}U_k, \tag{109}$$

si l'on y substitue les composantes de $\vec{V}'$, se ramènent à (95), (96) et (97) respectivement.

Les équations (107) et (109) entendent la sommation sur k. On a au total quatre équations, mais $i = 4$ conduit à l'identité de sorte qu'il ne reste en réalité que trois équations. Dans l'équation (108), il faut réaliser toutes les combinaisons de i, k, l de quatre valeurs possibles 1, 2, 3, 4 trois à trois. Le nombre de ces combinaisons est $C_4^3 = 4$, mais la combinaison 1, 2, 3 donne l'identité, ce qui nous ramène à trois équations nécessaires. Ayant obtenu des expressions correctes des équations matérielles dans le repère K', nous avons prouvé la justesse de la forme tensorielle.

Considérons, à titre d'exemple, l'équation (109). Supposons donnée, dans le système en comouvement K' (milieu au repos), la densité de courant, tandis que celle de charge est nulle, c.-à-d.

$$s'_i\,(j'_1,\ j'_2,\ j'_3,\ 0).$$

La vitesse du milieu dans K'

$$\vec{V}'\,(0,\ 0,\ 0,\ ic).$$

Trouvons les composantes s'_i:

$$s'_1 = \frac{\sigma}{c} F'_{1k}U'_k = \frac{\sigma}{c} F_{14}U'_4 = \frac{\sigma}{c}\,(-iE'_1)\,(ic) = \sigma E'_1,$$

c.-à-d.

$$j'_1 = \sigma E'_1\,;$$

on aura également:

$$j'_2 = \sigma E'_2,$$
$$j'_3 = \sigma E'_3.$$

La quatrième composante:

$$s'_4 = \frac{\sigma}{c} F'_{4k}U'_k \equiv 0 \qquad (s'_4 = ic\rho' = 0,\ \ F'_{44} = 0).$$

Mais dans le système de référence où le milieu est en mouvement, on a

$$s_1 = \frac{\sigma}{c} F_{1k}U_k = \frac{\sigma}{c}(F_{12}U_1 + F_{13}U_3 + F_{14}U_4) = \frac{\sigma}{c}(-iE_x)\, ic\Gamma = \sigma\Gamma E_x,$$

$$s_2 = \frac{\sigma}{c} F_{2k}U_k = \frac{\sigma}{c}(F_{21}U_1 + F_{24}U_4) =$$

$$= \frac{\sigma}{c}(-cB_2\Gamma V + (-iE_y)\, ic\Gamma) = \sigma\Gamma\{E_y + (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B})_y\},$$

$$s_3 = \sigma\Gamma\,\{E_z + V \times B_z\}.$$

Le résultat final est évident :

$$\boldsymbol{j} = \sigma\Gamma\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}).$$

Sa signification est parfaitement claire : la densité de courant dans un milieu de conductibilité σ est conditionnée par la valeur du champ électrique régnant dans ce milieu et ce champ est justement le facteur de σ d'après (43) si l'on pose $\Gamma \sim 1$.

La quatrième équation définit la densité de charge, liée au courant de conduction :

$$s_4 = ic\rho_{\text{cond.}} = \frac{\sigma}{c} F_{4k}U_k = \frac{\sigma}{c}(i\Gamma \boldsymbol{E}\boldsymbol{V}) = i\Gamma\left(\frac{j_{\text{cond.}}V}{c}\right),$$

ou

$$\rho_{\text{cond.}} = \Gamma\frac{jV}{c^2}$$

en plein accord avec (24).

Il faut distinguer le courant de conduction et celui de convection. Ce dernier apparaît dans le cas où le milieu en mouvement porte des charges tandis que le courant de conduction représente le mouvement des charges par rapport au milieu. Supposons que, dans quelque système K', il y ait un courant de conduction $\boldsymbol{j}' = \sigma\boldsymbol{E}'$ et, de plus, une densité de charge ρ'. Ces grandeurs forment ensemble un 4-courant transformable d'après les formules (15) pour tout système de référence. En exprimant les composantes de $\boldsymbol{j}$ et la densité ρ au moyen de $\boldsymbol{j}'$ et ρ' du système K', nous obtenons

$$j_x = \Gamma(j'_x + V\rho'),\quad j_y = j'_y,\quad j_z = j'_z,\quad \rho = \Gamma\left(\rho' - \frac{V}{c^2}j'_x\right). \qquad (110)$$

De la première formule (110) découle que le courant de conduction dans K n'est plus proportionnel à σ. Cela n'est pas commode, car pour $\sigma = 0$ le courant de conduction doit se réduire à 0. Comment donc mettre en évidence le courant de conduction dans le cas général ? Rappelons à cet effet que si dans K' la densité de charge $\rho' = \rho_0$, dans tout autre référentiel K on obtient la 4-densité de courant (21) :

$$s_i^{(\text{conv.})} = \rho_0 u_i, \qquad (111)$$

où u_i est la 4-vitesse de la charge. Ce courant est le courant de convection d'où découle l'apparition de l'indice supérieur (conv.) de s_i dans (111). Soit le 4-courant ayant pour composantes s_i ; on se propose de le présenter sous forme de la somme des courants de conduction et de convection. Exprimons avant tout ρ_0 en fonction de $\vec{s}$ et $\vec{V}$. La somme des produits des deux membres de $s_i = \rho_0 u_i$ par les composantes correspondantes u_i donne $s_k u_k = \rho_0 u_k^2$. D'après (IV, 6) $u_k^2 = -c^2$, c'est pourquoi

$$\rho_0 = -\frac{s_k u_k}{c^2}. \tag{112}$$

Par suite, le courant de convection peut s'écrire sous la forme :

$$s_i^{(\text{conv.})} = -\frac{s_k u_k}{c^2} u_i. \tag{113}$$

On tire les composantes du 4-courant de conduction en soustrayant les composantes (113) des composantes s_i :

$$s_i^{(\text{cond.})} = s_i - s_i^{(\text{conv.})} = s_i + \frac{s_k u_k}{c^2} u_i. \tag{114}$$

D'autre part, compte tenu de (109), la quantité $s_i^{(\text{cond.})}$ peut se présenter comme suit :

$$s_i^{(\text{cond.})} = \frac{\sigma}{c} F_{ik} u_k. \tag{115}$$

Egalons les deux expressions :

$$s_i + \frac{s_k u_k}{c^2} u_i = \frac{\sigma}{c} F_{ik} u_k. \tag{116}$$

En faisant appel aux définitions fondamentales de $\vec{s}\,(j_x, j_y, j_z, ic\rho)$, $\vec{V}\,(\gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z, ic\gamma)$, on arrive à l'expression tridimensionnelle :

$$\boldsymbol{j} + \gamma^2 \boldsymbol{v} \left\{ \frac{\boldsymbol{jv}}{c^2} - \rho \right\} = \sigma\gamma \{ \boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B} \}. \tag{117}$$

Essayons de dégager dans (117) les termes proportionnels à la conductibilité σ. Pour ce faire, multiplions les deux membres de (117) par $\boldsymbol{v}$. En introduisant les notations usuelles

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \tag{118}$$

nous obtenons :

$$\frac{\boldsymbol{jv}}{c^2} = \rho\beta^2 + \frac{\sigma(\boldsymbol{Ev})}{c^2} \frac{1}{\gamma}. \tag{119}$$

Puis

$$\frac{\boldsymbol{jv}}{c^2} - \rho = -\frac{\rho}{\gamma^2} + \frac{\sigma(\boldsymbol{Ev})}{c^2} \frac{1}{\gamma}. \tag{120}$$

En portant (120) dans (117), nous obtenons finalement

$$\boldsymbol{j}-\rho\boldsymbol{v}=\sigma\gamma\left\{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{v})\right\}. \tag{121}$$

Le premier membre de la relation (121) s'appelle courant tridimensionnel de conduction dans le repère K. La densité totale du courant étant $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}^{(\text{cond.})}+\boldsymbol{j}^{(\text{conv.})}$, il est clair que $\boldsymbol{j}^{(\text{conv.})}=\rho\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{j}^{(\text{cond.})}=\sigma\gamma\{\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{v})\}$. Il est souvent d'usage de désigner par $\boldsymbol{E}^*$ le champ dans le milieu considéré du point de vue du repère par rapport auquel ce milieu est en mouvement:

$$\boldsymbol{E}^*=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}. \tag{122}$$

Alors, (121) s'écrira:

$$\boldsymbol{j}^{(\text{cond.})}=\sigma\gamma\left\{\boldsymbol{E}^*-\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}(\boldsymbol{E}^*\boldsymbol{v})\right\}. \tag{123}$$

Nous conseillons au lecteur de comparer cette formule avec celle de transformation de la force (IV, 37). Ainsi, la présentation du courant résultant sous forme de somme des courants de conduction et de convection est fonction du référentiel où l'on observe les courants et les charges. Les courants de convection et de conduction sont entreliés. Il s'ensuit alors que leurs manifestations physiques doivent être les mêmes.

41. Tenseur énergie — impulsion — élasticité d'un champ électromagnétique. La Relativité restreinte réunit les grandeurs qui étaient indépendantes en expression tridimensionnelle. L'impulsion et l'énergie d'une particule libre forment un seul quadrivecteur. Dans le cas du champ électromagnétique, l'énergie et l'impulsion se réunissent également pour former cette fois-ci un tenseur qui contient, outre l'énergie (scalaire en cas tridimensionnel) et l'impulsion (vecteur tridimensionnel), encore le tenseur élasticité tridimensionnel de Maxwell.

Les notions mathématiques nécessaires pour la compréhension de ce paragraphe sont exposées dans l'Appendice, 7. Les résultats tridimensionnels de la théorie de Maxwell sont présentés dans ce qui suit.

1. Principe de conservation de l'énergie appliqué aux charges et aux champs:

$$\frac{d}{dt}(T+W)=-\oint_S \boldsymbol{S}\,d\boldsymbol{S}. \tag{124}$$

Le premier membre contient, sous le signe de dérivation par rapport au temps, la somme de l'énergie cinétique T des charges et de l'énergie du champ W enfermées dans le volume $\mathfrak{V}$. L'énergie

du champ W se déduit de la densité d'énergie

$$w = \frac{\boldsymbol{ED} + \boldsymbol{BH}}{2}$$

d'après la formule

$$W = \oint_{\mathfrak{B}} w \, d\mathfrak{V}. \tag{125}$$

La variation de l'énergie cinétique par unité de temps est égale à

$$\frac{dT}{dt} = \oint_{\mathfrak{B}} \boldsymbol{f v} \, d\mathfrak{V}, \tag{126}$$

la densité de force $\boldsymbol{f}$ de (126) étant définie comme suit :

$$\boldsymbol{f} = \rho \{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\}.$$

Le second membre de (124) représente le flux du vecteur de Poynting-Oumov

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{127}$$

à travers la surface délimitant le volume $\mathfrak{B}$. Sous le signe d'intégration de (124), il y a $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} \, dS$ qui est un produit de l'aire élémentaire dS par sa normale $\boldsymbol{n}$.

Le vecteur de Poynting-Oumov est considéré comme le flux d'énergie traversant par unité de temps l'unité de surface disposée perpendiculairement à ce vecteur. Signalons que bien que la définition (127) du vecteur de Poynting-Oumov ne soit pas l'unique possible (en fait, ce vecteur ne doit satisfaire qu'à (124)), elle est quand même la plus fructueuse et n'entraîne aucune contradiction.

2. Principe de conservation de l'impulsion pour les charges et les champs :

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{G}) = \oint_{S} T_{\alpha\beta} n_\alpha \boldsymbol{m}_\beta \, dS. \tag{128}$$

Le second membre de (128) contient le tenseur élasticité de Maxwell dont les composantes $T_{\alpha\beta}$ ont pour expression :

$$T_{\alpha\beta} = E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta - \delta_{\alpha\beta} w, \tag{129}$$

où les indices α et β prennent les valeurs de 1 à 3 et la densité d'énergie w se définit par (125). L'expression sous le signe d'intégration du second membre de (128)

$$T_{\alpha\beta} n_\alpha \boldsymbol{m}_\beta \, dS$$

est une force s'exerçant sur une surface dS infiniment petite, $\boldsymbol{m}_\beta$ sont les vecteurs unitaires du système de coordonnées cartésiennes et n_α sont les composantes de la normale à la surface dS.

Le premier membre de (128) contient, sous le signe de dérivation, la somme des impulsions de charges

$$\frac{dP}{dt} = \int_{\mathfrak{V}} f \, d\mathfrak{V} \tag{130}$$

et la quantité G interprétée comme impulsion du champ électromagnétique enfermé dans le volume $\mathfrak{V}$:

$$\frac{d}{dt} G = \frac{d}{dt} \int_{\mathfrak{V}} g \, d\mathfrak{V} = \int_{\mathfrak{V}} \dot{g} \, d\mathfrak{V}.$$

La densité d'impulsion g ne peut être définie univoquement que pour le vide:

$$g = \frac{S}{c^2}, \tag{131}$$

où S est le vecteur de Poynting et $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

Il y a deux circonstances importantes à souligner. Premièrement, le tenseur (129) symétrique dans le vide et dans les milieux homogènes et isotropes devient antisymétrique dans les milieux anisotropes (cristaux). Deuxièmement, le tenseur (129) n'est pas défini univoquement par la méthode usuelle. Les équations de Maxwell ne fournissent que l'expression (128). Pour cette raison, en additionnant à $T_{\alpha\beta}$ $\theta_{\alpha\beta}$ satisfaisant à la condition

$$\oint_S \theta_{\alpha\beta} n_\alpha m_\beta \, dS = \int_{\mathfrak{V}} \frac{\partial \theta_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} m_\beta \, d\mathfrak{V} = 0, \tag{132}$$

on n'affecte pas la relation (128) (en ce qui concerne la dernière égalité, voir Appendice, p. 280). On a ici les mêmes problèmes que dans le cas où on définit le vecteur de Poynting à partir du théorème de la conservation de l'énergie ou on cherche l'expression de la densité du courant de déplacement. Notre choix des formules est conditionné par le degré de validité de toutes les conséquences d'un tel choix. Dans le vide, où $D = \varepsilon_0 E$, $B = \mu_0 H$, le tenseur élasticité (129) avec l'impulsion (131) conduit à des résultats physiquement raisonnables. Cela est surtout évident pour la méthode quadridimensionnelle décrite à ce paragraphe. Mais la définition de la densité d'impulsion d'un champ électromagnétique dans le milieu rencontre certaines difficultés. On pourrait, certes, trouver une autre définition de la densité d'impulsion, ce qui entraînerait la modification du tenseur T_{ik}. Les problèmes s'y rapportant sont formulés au paragraphe 53 (ch. VII).

En résumé, d'après les équations de Maxwell, un champ électromagnétique dans le vide se caractérise par la densité d'impulsion (131). La formule (128) traduit alors tout simplement le principe

fondamental de Newton: l'accroissement de l'impulsion résultante des charges et du champ dans le volume $\mathfrak{B}$ est égal à la somme de toutes les forces qui y sont appliquées. Il est possible de les ramener aux forces superficielles, c.-à-d. celles qui s'exercent sur la surface enveloppant le volume $\mathfrak{B}$. Nous retrouverons ces résultats dans les expressions quadridimensionnelles.

Le passage formel à la forme quadridimensionnelle s'effectue de la façon suivante. La densité de 4-force $\vec{\mathcal{K}}$ peut s'écrire sous forme de la divergence quadridimensionnelle du tenseur:

$$\mathcal{K}_i \equiv \frac{1}{c} F_{ik} s_k = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}, \tag{133}$$

où T_{ik} est dit *tenseur énergie — impulsion — élasticité* *); ses composantes sont:

$$T_{ik} = \frac{1}{c} F_{im} f_{mk} + \frac{1}{4c} \delta_{ik} (F_{sn} f_{sn}). \tag{134}$$

On somme sur m dans le premier terme du deuxième membre et sur s et n dans le second terme; F_{im} et f_{sn} sont les composantes respectives des tenseurs (29) et (31).

Démontrons maintenant la formule (133). Pour ce faire, recourons aux équations de Maxwell écrites sous les formes (91) et (94'); récrivons-les sous forme plus commode:

$$\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_l} = s_k, \tag{135}$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = -\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}. \tag{136}$$

Commençons la transformation de la 4-densité de force:

$$\mathcal{K}_i = \frac{1}{c} F_{ik} s_k = \frac{1}{c} F_{ik} \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_l} = \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_l} (F_{ik} f_{kl}) - f_{kl} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} \right\}. \tag{137}$$

On a tenu compte de (135) et appliqué la règle de dérivation du produit.

Occupons-nous du second terme de (137):

$$f_{kl} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \left(f_{kl} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + f_{lk} \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_l} \right) = \frac{1}{2} \left(f_{kl} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + f_{kl} \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} f_{kl} \left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} \right) = -\frac{1}{2} f_{kl} \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} f_{kl} \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} =$$
$$= -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{kl})^2 = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{sn} F_{sn}). \tag{138}$$

*) Le tenseur quadridimensionnel (134) est désigné par T tout comme celui tridimensionnel (129); cela se justifie également par ce que neuf composantes de (134) pour i et k parcourant les valeurs de 1 à 3 coïncident avec (129).

Dans cette suite d'égalités on effectue les opérations suivantes.

Le passage à la seconde expression consiste en permutation des indices de chaque facteur du produit sans changer ce dernier, car les tenseurs f_{kl} et F_{ik} sont antisymétriques:

$$f_{kl}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}=f_{lk}\frac{\partial F_{ki}}{\partial x_l}\,. \tag{139}$$

Compte tenu de ce fait, nous présentons un terme comme la demi-somme de deux expressions égales de (139). Dans la troisième expression, on a permuté les indices muets sans changer le résultat de l'addition : l'indice l est remplacé par k et inversement, c.-à-d.

$$\text{au lieu de } f_{lk}\frac{\partial F_{ki}}{\partial x_l} \text{ est écrit } f_{kl}\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}\,.$$

Dans la quatrième expression, f_{kl} est mis en facteur et dans la cinquième est utilisée l'expression (136). Dans la sixième expression F_{kl} est remplacé conformément à (90), ce qui n'est valable que pour le vide.

Toutefois, le résultat (138) est aussi conforme au milieu homogène. Il est facile de s'assurer que la relation entre les composantes des tenseurs $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{F}$ y est marquée par le même caractère de proportionnalité à telle différence près que les facteurs de proportionnalité sont différents pour les composantes spatiales et temporelles. Il suit de la forme générale des tenseurs $\mathfrak{F}=(c\boldsymbol{B},\,-i\boldsymbol{E})$ et $\mathfrak{f}=(\boldsymbol{H},\,-ic\boldsymbol{D})$ que les composantes spatiales relient les vecteurs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$ entre eux, tandis que les composantes temporelles font autant pour les vecteurs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$. Pour obtenir une relation correcte entre $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$, il faut poser:

$$f_{\alpha\beta}=\frac{\mu_0}{\mu}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,F_{\alpha\beta}=a_1F_{\alpha\beta},\quad a_1=\frac{\mu_0}{\mu}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,, \tag{140}$$

$$f_{k4}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,F_{k4}=a_2F_{k4},\quad a_2=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,. \tag{141}$$

Compte tenu de cette hypothèse, la suite d'égalités s'écrira à partir de la cinquième :

$$\frac{1}{2}f_{kl}\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}=\frac{1}{2}a_1f_{\alpha\beta}\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_i}+\frac{1}{2}f_{k4}\frac{\partial f_{k4}}{\partial x_i}=\frac{a_1}{4}\frac{\partial}{\partial x_i}(f_{\alpha\beta})^2+$$
$$+\frac{a_2}{4}\frac{\partial}{\partial x_i}(f_{k4})^2=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_i}(f_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta})+\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_i}(f_{k4}F_{k4})=$$
$$=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_i}(f_{kl}F_{kl})=\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_i}(f_{sn}F_{sn}). \tag{142}$$

La dernière expression de (138), tout comme la troisième de (142), traduisent la règle de dérivation d'un produit :

$$f_{kl}\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(f_{kl})^2.$$

Du fait que les facteurs a_1 et a_2 dans (140) et (141) sont constants, on peut les mettre sous le signe de dérivation. Enfin, pour faciliter la sommation, d'autres indices muets sont introduits sans perturber la somme:

$$f_{kl}F_{kl} = f_{sn}F_{sn}.$$

Ainsi donc, les résultats obtenus pour le vide et pour le milieu isotrope et homogène sont identiques.

Afin de réunir le premier terme de (137) avec le second sous forme définitive (138) ou (142), il faut procéder à la dérivation dans les deux termes par rapport aux mêmes variables. Le symbole de Kronecker permet de passer à la dérivation par rapport à une autre variable (voir Appendice, 4). En effet,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \delta_{il}\frac{\partial}{\partial x_l},$$

où δ_{il} est défini selon (Appendice, 4).

Maintenant on peut écrire l'expression complète de $\mathscr{K}_i$ [voir (137)]:

$$\mathscr{K}_i = \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial}{\partial x_l}(F_{ik}f_{kl}) + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_i}(f_{sn}F_{sn})\right\} = \\ = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x_l}\left\{F_{ik}f_{kl} + \frac{1}{4}\delta_{il}(f_{sn}F_{sn})\right\}. \quad (143)$$

Dans le premier terme, remplaçons les indices muets de sommation: substituons m à l'indice k et k à l'indice l. On est ainsi conduit à la relation finale avec la notation usuelle des indices:

$$K_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{1}{c}F_{im}f_{mk} + \frac{1}{4c}\delta_{ik}(f_{sn}F_{sn})\right\} \equiv \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}, \quad (144)$$

où T_{ik} est défini conformément à (134).

Donc, les composantes de la 4-force $\vec{\mathscr{K}}$ s'expriment en composantes du tenseur T_{ik} qui, à leur tour, dépendent des vecteurs champ $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ [rappelons que dans le vide, dont il s'agira dans ce paragraphe, les composantes des tenseurs $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{F}$ sont proportionnelles selon (90)].

De la définition même du tenseur T_{ik} (134) découle directement sa symétrie dans le vide, i.e. $T_{ik} = T_{ki}$. Cela signifie qu'il a dix composantes indépendantes.

Trouvons maintenant les composantes de T_{ik} exprimées au moyen des vecteurs d'un champ électromagnétique. Au début, considérons l'expression $f_{sn}F_{sn}$. Ce n'est qu'une somme des produits des éléments respectifs, pris deux par deux, des matrices (29) et (31). De la définition des tenseurs $\mathfrak{f}(\boldsymbol{H}, -ic\boldsymbol{D})$ et $\mathfrak{F}(c\boldsymbol{B}, -i\boldsymbol{E})$ découlent immédiatement les composantes respectives. En désignant par Λ le facteur de δ_{ik}, on a:

$$\Lambda = \frac{1}{4c}f_{sn}F_{sn} = \frac{1}{4c}\cdot 2(c\boldsymbol{BH} - c\boldsymbol{DE}) = \frac{\boldsymbol{BH}}{2} - \frac{\boldsymbol{DE}}{2}. \quad (145)$$

Devant la parenthèse apparaît le chiffre 2, puisque l'antisymétrie de f et F fait que le produit des composantes, prises deux par deux, donne deux fois l'expression $c(\boldsymbol{BH}-\boldsymbol{DE})$. Il est désormais possible de récrire la formule des composantes T_{ik} (en substituant $-f_{km}$ à f_{mk}) comme suit

$$T_{ik}=-\frac{1}{c}F_{im}f_{km}+\delta_{ik}\Lambda. \tag{146}$$

Trouvons quelques composantes, par exemple T_{11}:

$$T_{11}=-\frac{1}{c}F_{1m}f_{1m}+\Lambda=-\frac{1}{c}F_{11}f_{11}-\frac{1}{c}F_{12}f_{12}-\frac{1}{c}F_{13}f_{13}-$$
$$-\frac{1}{c}F_{14}f_{14}+\Lambda=-\frac{1}{c}(cB_zH_z+cB_yH_y+cE_xD_x)+\frac{\boldsymbol{BH}}{2}-$$
$$-\frac{\boldsymbol{DE}}{2}=-\boldsymbol{BH}+H_xB_x+E_xD_x+\frac{\boldsymbol{BH}}{2}-\frac{\boldsymbol{DE}}{2}=H_xB_x+$$
$$+E_xD_x-\frac{\boldsymbol{DE}+\boldsymbol{BH}}{2}=H_1B_1+E_1D_1-w.$$

Nous venons de constater que T_{11} est une composante du tenseur élastique tridimensionnel de Maxwell (129). Par des calculs analogues, on parvient à la conclusion que toutes les composantes du tenseur $T_{\alpha\beta}$, notamment celles, dont les indices i, k prennent les valeurs de 1 à 3, coïncident avec le tenseur élasticité de Maxwell (129). Il ne reste qu'à envisager les composantes de T_{ik}, dont au moins un des indices est égal à 4. Commençons par T_{44}:

$$T_{44}=-\frac{1}{c}F_{4m}f_{4m}+\Lambda=E_xD_x+E_yD_y+E_zD_z+$$
$$+\frac{\boldsymbol{BH}}{2}-\frac{\boldsymbol{DE}}{2}=\frac{\boldsymbol{BH}}{2}+\frac{\boldsymbol{DE}}{2}=w.$$

Ce n'est autre que la densité d'énergie d'un champ électromagnétique. Maintenant, c'est le tour de T_{14}:

$$T_{14}=T_{41}=-\frac{1}{c}F_{1m}f_{4m}=-\frac{1}{c}(F_{12}f_{42}+F_{13}f_{43})=ic\,(D_yB_z-D_zB_y)=$$
$$=-ic\varepsilon_0\mu_0\,(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})_x=-\frac{i}{c}S_x=-ic\frac{S_x}{c^2}=-icg_x. \tag{147}$$

De même

$$T_{24}=T_{42}=-icg_y,$$
$$T_{34}=T_{43}=-icg_z. \tag{148}$$

Les composantes T_{14}, T_{24}, T_{34} sont proportionnelles à celles de la densité d'impulsion d'un champ électromagnétique $\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{S}}{c^2}$. Le fait qu'il s'agit ici de la densité d'impulsion et non du flux

d'énergie auquel l'impulsion est proportionnelle, sera discuté plus loin [voir (151)]. Ecrivons la matrice du tenseur énergie-impulsion-élasticité d'un champ électromagnétique dans le vide:

$$T=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -icg_x \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -icg_y \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -icg_z \\ -\frac{i}{c}S_x & -\frac{i}{c}S_y & -\frac{i}{c}S_z & w \end{pmatrix}. \qquad (149)$$

En haut à gauche, on a le tenseur élasticité de Maxwell. Il acquiert une signification relativiste correcte après être encadré par les quantités énergétiques $\boldsymbol{S}$ et w. Montrons qu'une fois le tenseur T_{ik} construit, on obtient les principes de la conservation de l'énergie et de l'impulsion, exprimés sous forme tridimensionnelle par les équations (124) et (127).

Analysons les composantes spatiales de la 4-force

$$\mathcal{K}_\alpha=\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}-\frac{i}{c}\frac{\partial S_\alpha}{\partial (ict)}=\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial S_\alpha}{\partial t}=\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}-\frac{\partial g_\alpha}{\partial t}. \qquad (150)$$

On a pris en considération que l'impulsion tridimensionnelle d'un champ électromagnétique a pour composantes:

$$g_\alpha=\frac{S_\alpha}{c^2}.$$

En tenant compte de ce que $K_\alpha \boldsymbol{m}_\alpha=\boldsymbol{f}$ est la force tridimensionnelle de Lorentz, la somme des produits de chaque composante K_α ($\alpha = 1, 2, 3$) par son vecteur unitaire $\boldsymbol{m}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) donne:

$$\boldsymbol{f}+\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}=\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\boldsymbol{m}_\alpha. \qquad (151)$$

En intégrant l'égalité (151) par rapport au volume arbitraire on est conduit à:

$$\int_{\mathfrak{V}} \boldsymbol{f}\, d\mathfrak{V}+\int_{\mathfrak{V}} \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}\, d\mathfrak{V}=\int_{\mathfrak{V}} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\boldsymbol{m}_\alpha\, d\mathfrak{V}. \qquad (152)$$

L'accroissement de l'impulsion des charges dans le volume donné est égal à la résultante de toutes les forces appliquées à ce volume:

$$\int_{\mathfrak{V}} \boldsymbol{f}\, d\mathfrak{V}=\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}. \qquad (153)$$

L'impulsion résultante $\boldsymbol{G}$ du volume $\mathfrak{V}$ est égale à

$$\int \boldsymbol{g}\, d\mathfrak{V}=\boldsymbol{G}. \qquad (154)$$

Appliquons le théorème de Gauss-Ostrogradski au second membre de (152):

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} m_\alpha \, d\mathfrak{B} = \oint\limits_S T_{\alpha\beta} n_\beta m_\alpha \, dS = \oint\limits_S T_{\alpha\beta} n_\alpha m_\beta \, dS. \qquad (155)$$

En introduisant les expressions (153), (154) et (155) dans (152), nous sommes conduits au résultat (127):

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{G}) = \oint T_{\alpha\beta} n_\alpha m_\beta \, dS. \qquad (156)$$

Cette formule traduit le principe de la conservation de l'impulsion des particules et du champ électromagnétique. Le second membre de (152) représente le flux d'impulsion à travers une surface fermée enveloppant le volume considéré. La quantité $T_{\alpha\beta} m_\beta$ est la densité du flux d'impulsion. Le principe de la conservation obtenu se prononce donc pour notre hypothèse sur la proportionnalité de T_{14}, T_{24}, T_{34} aux composantes de l'impulsion du champ électromagnétique.

Analysons maintenant la quatrième composante de (133). D'une part, d'après (122), on a:

$$\mathcal{K}_4 = \frac{i\rho}{c}(\boldsymbol{vE}) = \frac{i}{c}(\boldsymbol{fv}), \qquad (157)$$

et d'autre part,

$$\mathcal{K}_4 = \frac{\partial T_{4k}}{\partial x_k} = \frac{\partial T_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4} = -\frac{i}{c}\operatorname{div}\boldsymbol{S} + \frac{\partial w}{\partial (ict)}. \qquad (158)$$

Par conséquent, (158) s'écrit:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{S} + (\boldsymbol{vf}) = 0. \qquad (159)$$

Compte tenu de (125) et (126), l'intégration de l'expression (159), étendue à un volume arbitraire du champ, donne

$$\frac{d}{dt}(T + W) = -\oint\limits_S \boldsymbol{S}\, d\boldsymbol{S}, \qquad (160)$$

le théorème de Gauss étant appliqué au terme div $\boldsymbol{S}$ de (159). Ce n'est autre que le principe de la conservation de l'énergie (124).

Ainsi donc, dans la théorie relativiste l'impulsion, l'élasticité de Maxwell et l'énergie du champ dans le vide ont fusionné en une quantité tensorielle qui est le tenseur énergie-impulsion-élasticité. Les principes de la conservation de l'énergie et de l'impulsion se sont réunis en une seule expression.

La propriété la plus importante du tenseur énergie-impulsion-élasticité est sa symétrie. Il en découle immédiatement la relation fondamentale entre le flux d'énergie et l'impulsion pour le champ électro-

magnétique dans le vide:

$$S = gc^2. \tag{161}$$

Remarquons que, d'après Planck, la formule (161) a une portée plus générale que l'application au tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique dans le vide. Tout flux d'énergie est lié à l'impulsion et cette relation a un caractère universel. Cela concerne, en particulier, le flux d'énergie électromagnétique dans un milieu. Ce problème sera envisagé au paragraphe 53 (chap. VII).

Il est facile de s'assurer que la « trace » du tenseur, i.e. la somme de ses composantes diagonales, est nulle.

Ayant établi la nature tensorielle de l'élasticité, de l'impulsion, du flux et de la densité d'énergie du champ électromagnétique, nous obtenons automatiquement les lois de transformation de ces quantités lors du changement de référentiel. Nous n'écrivons que les formules qui seront utiles dans ce qui suit. En portant les valeurs des composantes (149) dans les formules générales (Appendice, 31), on est conduit à:

$$T_{xx} = T_{11} = \Gamma^2 \left(T'_{xx} - 2\frac{V}{c^2} S'_x - \frac{V^2}{c^2} w'\right), \tag{162}$$

$$T_{44} = \Gamma^2 \left(w' + 2\frac{V}{c^2} S'_x - \frac{V^2}{c^2} T'_{xx}\right), \tag{163}$$

$$T_{xy} = T_{12} = \Gamma \left(T'_{xy} - \frac{V}{c^2} S'_y\right), \tag{164}$$

$$g_x = \Gamma \left\{\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) g'_x + \frac{V}{c^2} w' - \frac{V}{c^2} T'_{xx}\right\}, \tag{165}$$

$$g_y = \Gamma \left(g'_y - \frac{V}{c^2} T'_{xy}\right). \tag{166}$$

42. Tenseur énergie — impulsion — élasticité de la charge à symétrie sphérique. Si la charge est immobile dans le repère K, elle n'y crée que le champ électrique. Le tenseur énergie-impulsion-élasticité s'écrit alors:

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}, \tag{167}$$

où $w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ et $T_{\alpha\beta} = \varepsilon_0 E_\alpha E_\beta - \delta_{\alpha\beta} w$. Si la charge se déplace avec une vitesse V dans le référentiel K', son tenseur T'_{ik} est trouvé à l'aide des formules générales de transformation des composantes d'un tenseur. En ce qui concerne la transformation de la densité d'impulsion suivant l'axe des x $\left(\frac{i}{c} T_{14}\right)$ et de la densité d'énergie (T_{44}), on a conformément à (Appendice, 31):

$$T'_{14} = -iB\Gamma^2 T_{11} + \Gamma^2 iB T_{44} = iB\Gamma^2 (w - T_{11}),$$

$$T'_{44} = \Gamma^2 T_{44} - B^2\Gamma^2 T_{11} = \Gamma^2 \left(w - \frac{V^2}{c^2} T_{11}\right).$$

Déterminons l'énergie totale et l'impulsion résultante d'une charge ponctuelle en tenant compte de ce que la transformation de l'élément de volume $d\mathfrak{V}'$ du référentiel K' en élément de volume $d\mathfrak{V}$ du référentiel K s'effectue d'après la formule $d\mathfrak{V}' = \frac{1}{\Gamma} d\mathfrak{V}$:

$$U' = \int T'_{44} d\mathfrak{V}' = \int T'_{44} \frac{1}{\Gamma} d\mathfrak{V} = \Gamma \int (w - B^2 T_{11})\, d\mathfrak{V}, \tag{168}$$

$$G'_x = \frac{i}{c} \int T'_{14} d\mathfrak{V}' = \frac{i}{c} \int T'_{14} \frac{1}{\Gamma} d\mathfrak{V} = \frac{B\Gamma}{c} \int (T_{11} - w)\, d\mathfrak{V}. \tag{169}$$

Il est évident que

$$\int w\, d\mathfrak{V} = \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\mathfrak{V} = U.$$

Si la charge a une symétrie sphérique dans le référentiel propre K, c.-à-d.

$$E_x^2 = E_y^2 = E_z^2 = \frac{E^2}{3},$$

alors

$$\int T_{11} d\mathfrak{V} = \varepsilon_0 \int \left(E_x^2 - \frac{E^2}{2} \right) d\mathfrak{V} = -\frac{\varepsilon_0}{6} \int E^2 d\mathfrak{V} = -\frac{U}{3}.$$

Par conséquent, les formules (168) et (169) seront de la forme

$$U' = \Gamma U \left(1 + \frac{B^2}{3} \right), \tag{170}$$

$$G'_x = -\frac{4}{3} \frac{B}{c} \Gamma U. \tag{171}$$

Les composantes G'_y et G'_z de l'impulsion deviennent nulles de sorte que

$$G' = -\frac{4}{3} \frac{V}{c^2} \Gamma U.$$

L'apparition du signe « moins » dans l'expression de G' est due à la vitesse négative V de la charge par rapport au référentiel K'. En comparant les formules (170) et (171) avec celles de la transformation de l'impulsion et de l'énergie d'une particule lors du passage du référentiel propre à un référentiel quelconque [voir (IV, 39)], on voit que ces formules sont différentes. Autrefois, on essayait d'interpréter la masse d'électron comme électromagnétique en s'appuyant sur la relation:

$$m = \frac{U}{c^2}. \tag{172}$$

Le résultat obtenu ci-dessus montre que la masse totale de la particule ne se réduit pas seulement à la masse électromagnétique (172). Cela n'étonne pas: pour maintenir la charge à symétrie sphérique,

il faut avoir des forces complémentaires capables de compenser les forces de répulsion électrostatique. En introduisant les tensions mécaniques supplémentaires on obtient pour l'impulsion résultante et l'énergie l'expression suivante:

$$G' = -\Gamma V \frac{U}{c^2}, \qquad U' = \Gamma U$$

en conformité avec les formules (IV, 39). Le lecteur peut trouver l'étude détaillée dans l'ouvrage suivant: R. Becker, *Theorie der electrizität.* Band. II Electronentheorie. 6, vollstandig neubearbeitete auflage des werkes von M. Abraham Leipzig und Berlin Verlag und druk von B. G. Teubner, 1933.

Annexe I *)

Potentiels du champ dans le milieu en mouvement

Dans le paragraphe 32 on a introduit le 4-potentiel d'un champ électromagnétique dans le vide. La définition d'un champ électromagnétique découle immédiatement des équations de Maxwell sans avoir recours aux potentiels. Pourtant, dans plusieurs cas, l'utilisation des potentiels en tant que grandeurs intermédiaires pour la définition des champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ s'avère très commode, ne serait-ce que par le fait que le nombre de fonctions à déterminer diminue. A partir de quatre composantes d'un vecteur potentiel, on arrive aisément à toutes les composantes des champs magnétique et électrique ! Ce fait devient plus manifeste en Electrodynamique des milieux en mouvement où les équations matérielles (102) et (103) s'avèrent beaucoup plus compliquées que dans le cas du milieu au repos.

Nous verrons dans ce qui suit le procédé dont on se sert pour obtenir les expressions des potentiels dans le milieu en mouvement. Nous citerons, à titre d'exemple de l'application de ces potentiels, la propagation d'une onde électromagnétique plane dans un milieu qui se déplace par rapport à l'observateur. L'exemple en question est en rapport immédiat avec les problèmes considérés dans le chapitre VII. Dans le présent Annexe, nous utilisons l'algèbre tensorielle dont les méthodes sont brièvement expliquées en Appendice à la fin de l'ouvrage.

Passons maintenant aux équations pour le 4-potentiel dans les milieux mouvants.

Le champ de ce milieu est partout décrit par deux tenseurs F_{ik} [voir (29)] et f_{ik} [voir (31)], appelés parfois *tenseur champ* et *tenseur induction* respectivement.

Introduisons le quadripotentiel $\vec{\Phi}$ du champ dans le milieu par la relation

$$F_{ik} = c\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}\right), \tag{173}$$

qui s'identifie à la formule (28). Quatre composantes du potentiel Φ_k étant connues, cette formule nous permet de déterminer toutes les composantes du tenseur F_{ik}, c.-à-d. l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ et le champ électrique $\boldsymbol{E}$. Le champ électromagnétique dans le milieu peut être considéré comme complètement décrit si l'on connaît les composantes du tenseur f_{ik}, donc les composantes des

*) Cet Annexe est écrit par B. Bolotovski et S. Stoliarov.

vecteurs champ magnétique et induction électrique. Si toutes les composantes du tenseur champ F sont connues, le tenseur induction f se déduit à l'aide des équations matérielles (107) et (108) reliant les composantes de ces deux tenseurs. (Rappelons que la relation entre les tenseurs $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{f}$ est définie, sous sa forme vectorielle, selon les équations matérielles (102) et (103) appelées parfois *équations de Minkowski.*)

Les relations matérielles (107) et (108) entre les tenseurs $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{f}$ peuvent s'écrire sous forme d'une seule relation tensorielle

$$f_{ik} = \varepsilon_{iklm} F_{lm}, \tag{174}$$

où le tenseur du quatrième ordre ε_{iklm} est choisi de sorte que les relations de Minkowski (107) et (108) soient remplies. Le tenseur nécessaire sera donc

$$\varepsilon_{iklm} = \frac{1}{\mu c} (\delta_{il} - \varkappa c^{-2} U_i U_l)(\delta_{km} - \varkappa c^{-2} U_k U_m), \tag{175}$$

où δ_{il} est le symbole de Kronecker défini selon la formule (Appendice, 4) et U_i les composantes de la quadrivitesse décrite au paragraphe 39 et ayant pour composantes $\vec{V}\,(\Gamma \boldsymbol{V},\ ic\Gamma)$ où $\Gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ et $\boldsymbol{V}$ est la 3-vitesse du déplacement du milieu. La constante $\varkappa$ est un nombre abstrait, égal à

$$\varkappa = \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} - 1 = n^2 - 1, \tag{176}$$

où ε et μ sont les constantes diélectrique et magnétique du milieu, ε_0 et μ_0 leurs équivalents pour le vide ; la grandeur n se définit selon (200). On voit aisément que, dans le vide, $\varkappa = 0$ et la relation (174) entre les tenseurs f et F prend la forme [comp. avec (90)]

$$f_{ik} = \frac{1}{\mu_0 c} F_{ik} \tag{177}$$

qui correspond aux relations connues entre les champs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ et les inductions $\boldsymbol{D}$. $\boldsymbol{B}$ dans le vide :

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}. \tag{178}$$

Dans le milieu immobile, le tenseur ε_{iklm} de la forme (175) relie les champs avec les inductions de la manière suivante :

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}. \tag{179}$$

Il est aisé de s'en convaincre en posant dans (175) $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ et $U_4 = ic$.

Comme les composantes du tenseur F_{lm} s'expriment en fonction du quadripotentiel Φ_l et celles du tenseur induction f_{ik} sont liées à F_{lm} par (174), alors les composantes du tenseur f_{ik} s'expriment également au moyen du quadripotentiel Φ_l. En d'autres termes, il suffit de connaître quatre fonctions de Φ_l pour déterminer toutes les composantes des champs et de l'induction dans un milieu en mouvement.

Passons à présent à la déduction des équations pour les potentiels du champ dans un milieu en mouvement. Pour cela, faisons appel à l'équation (91) :

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = s_i.$$

Portons dans cette équation f_{ik} sous forme de (174). On obtient

$$\varepsilon_{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_k} = s_i. \tag{180}$$

En utilisant la relation explicite (175) pour le tenseur ε_{iklm}, ainsi que la formule (28) qui exprime F_{lm} au moyen du potentiel Φ_l, on peut, après quelques simples transformations, réduire l'équation (180) à la forme suivante:

$$\frac{1}{\mu c}(\delta_{il}-\varkappa c^{-2}U_iU_l)\left\{\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_k}-\varkappa c^{-2}U_kU_m\frac{\partial\Phi_m}{\partial x_k}\right]-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}-\varkappa c^{-2}\left(U_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2\right]\Phi_l\right\}=s_i. \quad (181)$$

Multiplions les deux membres de l'équation (181) par le tenseur

$$\left(\delta_{i\alpha}+\frac{\varkappa}{1+\varkappa}c^{-2}U_iU_\alpha\right).$$

Ayant profité de la relation aisément vérifiée de la forme

$$(\delta_{il}-\varkappa c^{-2}U_iU_l)\left(\delta_{i\alpha}+\frac{\varkappa}{1+\varkappa}c^{-2}U_iU_\alpha\right)=\delta_{l\alpha}, \quad (182)$$

on obtient finalement

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}-\varkappa c^{-2}\left(U_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2\right]\Phi_\alpha-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_k}-\right.$$
$$\left.-\varkappa c^{-2}U_kU_m\frac{\partial\Phi_m}{\partial x_k}\right)=-\mu c\left(\delta_{i\alpha}+\frac{\varkappa}{1+\varkappa}c^{-2}U_iU_\alpha\right)s_i. \quad (183)$$

Le système d'équations (183) définit toutes les composantes du potentiel Φ_α d'après les sources données du champ s_i dans le milieu en mouvement.

Ce système peut être simplifié si l'on impose aux potentiels une condition subsidiaire bien choisie, par exemple, la relation qui suit

$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_k}-\varkappa c^{-2}U_kU_m\frac{\partial\Phi_m}{\partial x_k}=0. \quad (184)$$

Elle est une généralisation de la condition connue de Lorentz imposée aux potentiels dans le vide [voir (11) à (13)]. La condition (184) peut être vérifiée comme en Electrodynamique classique.

Une fois la condition (184) vérifiée, le système d'équations (183) se simplifie et prend la forme

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}-\varkappa c^{-2}\left(U_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2\right\}\Phi_\alpha=-\mu c\left(\delta_{i\alpha}+\frac{\varkappa}{1+\varkappa}c^{-2}U_iU_\alpha\right)s_i. \quad (185)$$

Le système (185) est plus commode que (183), car il comprend quatre équations, dont chacune inclut une seule composante du vecteur potentiel (α = 1, 2, 3 et 4). Avec les sources extérieures données la solution du système (185) définit complètement le champ créé par ces sources dans le milieu en mouvement.

Si le milieu en mouvement possède la surface de séparation, le système (185) d'équations pour le vecteur potentiel doit être complété par les conditions aux limites correspondantes (voir, par exemple, L. Landau et E. Lifchitz, *Electrodynamique des milieux continus*, Editions Mir, Moscou, 1969).

Comme exemple de la résolution des équations obtenues envisageons le champ électromagnétique dans le milieu en mouvement en l'absence de sources extérieures (courants et charges). Comme, dans ce cas, tous les s_i sont nuls, le système (185) se transforme en celui de quatre équations homogènes

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}-\varkappa c^{-2}\left(U_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2\right\}\Phi_\alpha=0. \quad (186)$$

En vertu de la condition subsidiaire (184), seules trois des quatre quantités Φ_α sont indépendantes. On peut donc poser $\Phi_4 = 0$ et considérer les trois autres quantités Φ_1, Φ_2, Φ_3 en tant que composantes d'un certain vecteur que nous désignerons par $\boldsymbol{A}$. Sous cette condition, le potentiel vecteur Φ_α du milieu en mouvement est le potentiel vecteur tridimensionnel $\boldsymbol{A}$.

Dans ce cas, le système d'équations (186) donne pour le potentiel $\boldsymbol{A}$ l'équation suivante:

$$\left\{ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \frac{\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0}{1-\mathrm{B}^2}\left[(\boldsymbol{V}, \nabla) + \frac{\partial}{\partial t}\right]^2 \right\} \boldsymbol{A} = 0, \qquad (187)$$

où $\mathrm{B} = \frac{V}{c}$, sous condition subsidiaire:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} - \frac{\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0}{1-\mathrm{B}^2}\left[(\boldsymbol{V}, \nabla) + \frac{\partial}{\partial t}\right](\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}) = 0, \qquad (188)$$

qui est déduite de la condition subsidiaire (184) pour $\Phi_4 = 0$. Si la solution de l'équation (187) est connue pour le potentiel $\boldsymbol{A}$, les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ s'exprimeront alors par $\boldsymbol{A}$ selon la formule (28). Cette dernière, dans notre cas, prend la forme simple:

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \qquad (189)$$

A partir de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$, on trouve $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{H}$ à l'aide des équations matérielles de Minkowski (102) et (103) pour le milieu en mouvement.

L'équation (187) définit la propagation des ondes électromagnétiques libres dans le milieu en mouvement (par les ondes électromagnétiques libres on entend normalement le champ en l'absence des charges et des courants). Passons maintenant à la résolution de cette équation. Recherchons le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ en tant qu'onde électromagnétique plane:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}. \qquad (190)$$

En portant cette expression dans (187), on obtient

$$\left\{ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) + \frac{\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0}{1-\mathrm{B}^2}(\boldsymbol{kV} - \omega)^2 \right\} \boldsymbol{A}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})} = 0. \qquad (191)$$

La relation (191) montre que l'amplitude $\boldsymbol{A}_0$ de l'onde plane n'est différente de zéro que pour les ondes telles qu'elles vérifient la condition

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) + \frac{\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0}{1-\mathrm{B}^2}(\boldsymbol{kV} - \omega)^2 = 0. \qquad (192)$$

Cette condition définit les rapports entre le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ et la pulsation ω de l'onde électromagnétique plane se propageant dans le milieu en mouvement. Les conditions subsidiaires (188) pour une telle onde prennent la forme

$$\left(\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{k} + \boldsymbol{V}\frac{\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0}{1-\mathrm{B}^2}(\omega - \boldsymbol{kV})\right) = 0. \qquad (193)$$

Il vient de la condition de réduction à zéro du produit scalaire (193) que dans le milieu en mouvement le vecteur $\boldsymbol{A}_0$ est perpendiculaire non à la direction de la propagation de l'onde, définie par le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$, mais à la combinaison linéaire de ce dernier avec le vecteur vitesse $\boldsymbol{V}$ du milieu. Dans deux cas particuliers où l'onde se propage dans le vide ($\varepsilon\mu = \varepsilon_0\mu_0$) ou le milieu est au repos ($\boldsymbol{V} = 0$), la condition (193) se réduit à la condition connue d'après laquelle les ondes électromagnétiques libres doivent être transversales:

$$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{k} = 0 \qquad (194)$$

d'où il vient que, pour l'onde électromagnétique libre, les vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{D}$ sont perpendiculaires au vecteur d'onde, c.-à-d. à la direction de la propagation de l'onde. En général, une telle transversalité des ondes n'a pas lieu dans le milieu en mouvement. En effet, pour l'onde plane (190), les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ se définissent selon (189):

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= -i\boldsymbol{k}\times \boldsymbol{A}_0 e^{i(\omega t-\boldsymbol{kr})}, \\ \boldsymbol{E} &= -i\omega \boldsymbol{A}_0 e^{i(\omega t-\boldsymbol{kr})}. \end{aligned}\right\} \tag{195}$$

Il s'ensuit que le vecteur $\boldsymbol{B}$ est perpendiculaire au vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$, tandis que le vecteur $\boldsymbol{E}$ ne l'est pas [en raison de la condition (193), le vecteur $\boldsymbol{A}_0$ n'est pas transversal].

L'équation (191), qui relie le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ et la pulsation ω de l'onde dans le milieu en mouvement, inclut le produit scalaire $\boldsymbol{kV}$. Cela signifie que les conditions de la propagation de l'onde dépendent de l'angle formé par cette dernière (ou, ce qui revient au même, par le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$) avec la vitesse $\boldsymbol{V}$ du milieu. Cette circonstance reflète le phénomène d'entraînement de la lumière par le milieu en mouvement. Envisageons-le de plus près pour le cas de faibles vitesses. Supposons que la quantité $\mathrm{B}=\frac{V}{c}$ soit petite et négligeons, dans (192), tous les degrés de B supérieurs au premier. On obtient alors

$$\frac{\omega^2}{c^2}-k^2+(\varepsilon\mu-\varepsilon_0\mu_0)\,[\omega^2-2\omega\,(\boldsymbol{k}\boldsymbol{V})]=0. \tag{196}$$

Effectuons la réduction des termes semblables tenant compte de ce que $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$:

$$\omega^2-2\boldsymbol{kV}\left(1-\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}\right)\omega-\frac{k^2}{\varepsilon\mu}=0. \tag{197}$$

En résolvant l'équation quadratique ci-dessus par rapport à ω, on a

$$\omega=\pm\frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}+\boldsymbol{kV}\left(1+\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}\right). \tag{198}$$

On met « plus » devant le premier terme du second membre vu que, pour $V = 0$, nous devons obtenir une relation connue entre ω et k dans le milieu immobile:

$$\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{n}; \tag{199}$$

ici nous avons introduit l'indice de réfraction du milieu immobile

$$n=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}. \tag{200}$$

La quantité $\frac{c}{n}$ est la vitesse de phase de la lumière dans le milieu immobile.

Si l'on désigne par ϑ l'angle formé par les vecteurs $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{V}$, on obtient, avec le choix convenable des signes, pour (198)

$$\frac{\omega}{k}=\frac{c}{n}+V\cos\vartheta\left(1-\frac{1}{n^2}\right). \tag{201}$$

Dans (201), ainsi que dans le cas du milieu immobile [voir (199)], la quantité $\frac{\omega}{k}$ définit la vitesse de phase de la lumière qui voyage cette fois-ci dans le milieu mobile isotrope. En comparant (201) et (199) on voit que la vitesse de

phase de la lumière dans le milieu en mouvement n'est pas la même dans les directions différentes. Si la lumière suit le mouvement du milieu ($\cos\vartheta = 1$), la vitesse de phase sera

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V. \tag{202}$$

Si le sens de la lumière est opposé à celui de mouvement du milieu ($\cos\vartheta = -1$), alors

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V. \tag{203}$$

Le facteur $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ est le *coefficient d'entraînement de la lumière* mesuré par Fizeau dans l'expérience où le milieu en mouvement a été représenté par l'eau. L'expérience de Fizeau est traitée en détail à la page 72.

Les potentiels obtenus comme solution de l'équation (185) peuvent être appliqués avec succès à beaucoup d'autres problèmes qui sont pourtant hors de questions envisagées dans le présent ouvrage.

Annexe II

Formules de l'électrodynamique écrites en système de Gauss

Le système de Gauss est aussi souvent employé en Electrodynamique que SI. On croit donc raisonnable d'écrire les formules principales aussi en système de Gauss *).

Dans le vide, les équations pour les potentiels A et φ sont de la forme

$$\Box A \equiv \Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j, \tag{1}$$

$$\Box \varphi \equiv \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \tag{2}$$

La condition de Lorentz est

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

Le principe de la conservation de la charge ne change pas sa forme:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0. \tag{4}$$

Les définitions du 4-potentiel et du 4-courant:

$$\vec{\Phi}(A, i\varphi), \tag{6}$$

$$\vec{s}(j, ic\rho). \tag{7}$$

La relation entre les champs et les potentiels:

$$B = \operatorname{rot} A, \quad E = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\dot{A}. \tag{25}$$

*) Les formules ont le même numérotage que dans le texte de ce chapitre.

Les tenseurs d'un champ électromagnétique dans le vide:

$$F_{ik}=\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_i}-\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k}\right), \tag{28}$$

$$f_{ik}=F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Les tenseurs d'un champ électromagnétique dans le milieu:

$$f_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Le tenseur des moments:

$$\mathfrak{M}_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & iP_x \\ -M_z & 0 & M_x & iP_y \\ M_y & -M_x & 0 & iP_z \\ -iP_x & -iP_y & -iP_z & 0 \end{pmatrix},$$

où maintenant $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}+4\pi\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}-4\pi\boldsymbol{P}$.

Les formules de transformation des champs:

$$\left.\begin{aligned} E_x&=E'_x, & B_x&=B'_x, \\ E_y&=\Gamma\left(E'_y+\frac{V}{c}B'_z\right), & B_y&=\Gamma\left(B'_y-\frac{V}{c}E'_z\right), \\ E_z&=\Gamma\left(E'_z-\frac{V}{c}B'_y\right), & B_z&=\Gamma\left(B'_z+\frac{V}{c}E'_y\right), \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned} D_x&=D'_x, \\ D_y&=\Gamma\left(D'_y+\frac{V}{c}H'_z\right), \\ D_z&=\Gamma\left(D'_z-\frac{V}{c}H'_y\right), \end{aligned}\right\} \text{(53)} \qquad \left.\begin{aligned} H_x&=H'_x, \\ H_y&=\Gamma\left(H'_y-\frac{V}{c}D'_z\right), \\ H_z&=\Gamma\left(H'_z+\frac{V}{c}D'_y\right). \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

La densité de la force de Lorentz:

$$f=\rho\left\{\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right\}. \tag{49}$$

Les invariants du champ:

$$\left.\begin{aligned} I_1&=F_{ik}^2=E^2-H^2, \\ I_2&=2i\boldsymbol{EH} \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Les équations de Maxwell sous forme tridimensionnelle:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{D}=4\pi\rho, \tag{88}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B}=0. \tag{89}$$

Les équations de Maxwell sous forme quadridimensionnelle:

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k}=\frac{4\pi}{c}s_i, \tag{91}$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}=0. \tag{94'}$$

Les équations matérielles sous forme tridimensionnelle ne sont pas modifiées:

$$\boldsymbol{D}'=\varepsilon\boldsymbol{E}', \tag{95}$$

$$\boldsymbol{B}'=\mu\boldsymbol{H}', \tag{96}$$

$$\boldsymbol{j}'=\sigma\boldsymbol{E}'. \tag{97}$$

Les équations matérielles sous forme quadridimensionnelle:

$$f_{ik}u_k=\varepsilon F_{ik}u_k, \tag{107}$$

$$F_{ik}u_l+F_{kl}u_i+F_{li}u_k=\mu\,(f_{ik}u_l+f_{kl}u_i+f_{li}u_k), \tag{108}$$

$$s_i=\frac{\sigma}{c}F_{ik}u_k. \tag{109}$$

L'expression quadridimensionnelle de la densité de force garde sa forme:

$$\mathcal{K}_i=\frac{1}{c}F_{ik}s_k. \tag{121}$$

La densité d'énergie d'un champ électromagnétique:

$$w=\frac{\boldsymbol{BH}+\boldsymbol{ED}}{8\pi}.$$

Le vecteur de Poynting-Oumov:

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}. \tag{127}$$

Le tenseur énergie-impulsion-élasticité dans le vide:

$$T_{ik}=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -icg_x \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -icg_y \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -icg_z \\ -\frac{i}{c}S_x & -\frac{i}{c}S_y & -\frac{i}{c}S_z & w \end{pmatrix}. \tag{149}$$

CHAPITRE VI

THERMODYNAMIQUE CLASSIQUE ET RELATIVITÉ RESTREINTE

Les postulats d'Einstein proclament que le principe de la relativité s'étend à tous les phénomènes physiques. Ce chapitre est consacré à l'étude des effets calorifiques dans de différents référentiels et l'universalité du principe de la relativité acquiert alors une forme parfaitement achevée. Le côté de principe de l'étude est exposé dans le paragraphe 43 et, en partie, dans le paragraphe 44. Le contenu des paragraphes 45 et 46 a pour but d'approfondir les conceptions relativistes et inclut les applications utiles des relations de la Relativité restreinte. Toutefois, les résultats de ces paragraphes ne se réduisent qu'aux formules de transformation de la température et de la quantité de chaleur.

43. Enoncé du problème. Les chapitres IV et V traitaient du comportement des équations fondamentales décrivant des phénomènes mécaniques et électrodynamiques vis-à-vis de la transformation de Lorentz. L'analyse a montré que les équations newtoniennes changeaient leur forme par la transformation de Lorentz, tandis que les équations de Maxwell restaient les mêmes. Par conséquent, les équations de la dynamique sont modifiées quelque peu et celles de Maxwell s'écrivent tout simplement sous forme quadridimensionnelle.

Il reste à étudier le comportement des équations fondamentales décrivant les phénomènes thermodynamiques, c.-à-d. des équations fondamentales de la thermodynamique macroscopique, lors du changement de repère. La révision des principes de la thermodynamique du point de vue des conceptions relativistes fut faite en 1907 par Planck et Hasenorle peu après l'apparition de l'ouvrage fondamental d'Einstein en 1905. Cette même année 1907, un aperçu d'Einstein reproduisait ces résultats comme une partie d'un schéma cohérent des raisonnements. Les principes de la thermodynamique (premier et second) bien connus sont valables incontestablement dans le référentiel où le système thermodynamique en question est au repos. La méthode classique suppose toujours l'étude dans le référentiel « propre » dans tout autre repère. Puis, le problème se posait de la façon suivante. Peut-on conserver la forme de deux principes de la thermodynamique, qu'ils ont dans le repère propre? S'il s'avérait possible de le faire pour la transformation de Lorentz, cela signifierait que certaines grandeurs thermodynamiques, telles que la quantité de chaleur transmise et la température du corps, devraient se

transformer lors du changement de repère selon une loi qu'il faudrait établir. Si l'on n'avait pas trouvé cette loi, on aurait eu à reviser les équations thermodynamiques, comme c'était le cas des principes de la mécanique classique. Or, les principes de la thermodynamique se sont montrés invariants lors du changement de référentiel et il ne s'agissait que de l'énoncé des lois de transformation de la quantité de chaleur reçue par le système et de sa température.

Ecrivons les deux principes de la thermodynamique dans le référentiel « propre » K' ; cela signifie que le système thermodynamique considéré y est au repos. Ce système (corps) est supposé en équilibre thermodynamique. Nous nous bornerons à l'étude des systèmes en équilibre stable et des transitions réversibles entre les états d'équilibre.

Conformément au premier principe, l'énergie totale du système (corps), désignée par E', est une fonction univoque de l'état thermodynamique du système dans K'. Si ce système (corps) participe à quelque processus conduisant au changement d'état du corps, la variation de l'énergie se définit comme suit :

$$\Delta E' = \Delta Q' + \Delta A', \tag{1}$$

où $\Delta Q'$ est la quantité de chaleur reçue par le système lors du processus et $\Delta A'$ le travail mécanique produit sur le système par les corps qui l'entourent. Il est évident que le travail des forces mécaniques peut inclure aussi celui des forces d'un champ électromagnétique si elles agissent sur le système. On sous-entend que toutes les quantités faisant partie de (1) sont mesurées en K'.

Le premier principe représente celui de la conservation de l'énergie et il est raisonnable de garder sa forme générale dans tous les référentiels. Voilà pourquoi, dans tout repère, on doit vérifier l'égalité

$$\Delta E = \Delta Q + \Delta A. \tag{2}$$

Notons immédiatement que le passage de (1) à (2) est déterminé dans une large mesure par ce que la mécanique relativiste des milieux continus fournit les formules de transformation de ΔE et ΔA et il ne s'agit que de trouver la transformation de ΔQ.

Avant de passer en revue le deuxième principe de la thermodynamique notons que les raisonnements les plus généraux conduisent à ce que l'entropie doit être l'invariant de la transformation de Lorentz. Que signifie le changement de référentiel? Dans K', le système thermodynamique est au repos, tandis que par rapport à tout autre référentiel il est en mouvement avec la vitesse constante. Du point de vue de la thermodynamique classique, le passage du repos au mouvement se fait adiabatiquement (c.-à-d. avec une accélération infiniment petite et sans échange de chaleur), ce qui signifie qu'au cours de ce passage l'état intérieur du système ne se modifie

pas. Il s'ensuit également que le système qui se meut relativement à K' possédera la même entropie qu'il avait au repos en K'. D'autre part, par rapport à K' le système se trouve après l'accélération dans le même état qu'il avait avant l'accélération relativement à K. Il en découle que l'entropie S' du corps relativement à K' doit être égale à l'entropie S par rapport à K. On peut donc écrire :

$$S = S'. \tag{3}$$

Ce résultat s'obtient directement de la définition statistique de l'entropie : elle doit être l'invariant de la transformation de Lorentz, car elle se détermine par la probabilité de l'état statistique du système.

D'après le deuxième principe de la thermodynamique, l'entropie, tout comme l'énergie totale, est une fonction de l'état thermodynamique dans le repère K'. Par définition, la variation infinitésimale de l'état du système entraîne celle de l'entropie conformément à

$$dS' = \frac{\Delta Q'_{\text{rév.}}}{T'} = \frac{\Delta E' - \Delta A'_{\text{rév.}}}{T'}, \tag{4}$$

où $\Delta Q'_{\text{rév.}}$ et $\Delta A'_{\text{rév.}}$ sont respectivement la quantité de chaleur gagnée par le système et le travail effectué lors du processus réversible qui fait changer l'état du système ; T' la température absolue en échelle Kelvin.

Si l'on conserve la définition de l'accroissement de l'entropie pour tous les référentiels inertiaux, c.-à-d. si l'on y pose

$$dS = \frac{\Delta Q_{\text{rév.}}}{T} = \frac{\Delta E - \Delta A_{\text{rév.}}}{T}, \tag{5}$$

l'invariance de l'entropie du système fournit

$$dS = dS', \tag{6}$$

ou, selon (4) et (5),

$$\frac{\Delta Q_{\text{rév.}}}{T} = \frac{\Delta Q'_{\text{rév.}}}{T'}. \tag{7}$$

La formule (7) met en évidence que les lois de transformation de la chaleur reçue par le système et de sa température doivent être les mêmes lors de la transition d'un repère à un autre. Notre tâche consiste en la recherche de la loi de transformation de ces quantités.

Envisageons un système thermodynamique concret, à savoir un gaz emprisonné dans un cylindre à volume variable. Il est le plus simple de prendre un cylindre dont une base est immobile et l'autre est représentée par le piston mobile. On étudie le processus avec la variation du volume de gaz et l'échange de chaleur. Le cylindre est disposé dans K' comme le montre la fig. 20. Il se déplace par rapport au repère K.

Il a été déjà mentionné qu'on connaissait les formules de transformation de ΔE et ΔA entrant dans l'expression du premier principe de la thermodynamique. Donc, en faisant $\Delta Q = \Delta E - \Delta A$ dans le repère K, on trouvera la transformation de ΔQ.

Quelles sont les formules de transformation de la variation de l'énergie du gaz $\Delta E'$ et du travail dépensé $\Delta A'$ lors du changement de référentiel? Il nous faudra donc trouver les formules pour le cas d'un gaz (liquide) qui représente un milieu continu. A la différence

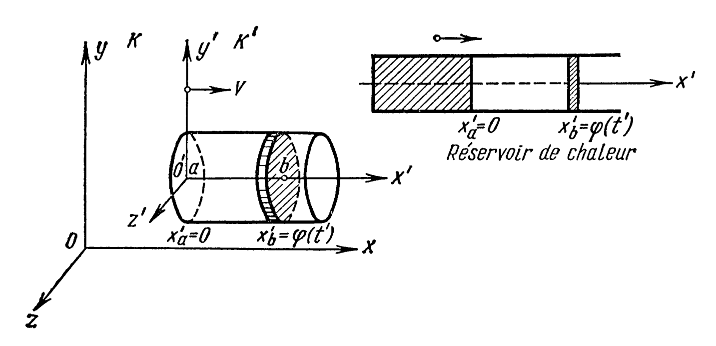


Fig. 20. A gauche on voit le cylindre à piston qui est au repos dans K'. Pour plus de clarté, les axes des x et x' qui coïncident sont représentés légèrement écartés. On suppose qu'à l'instant $t = t' = 0$, les origines des coordonnées O et O' se confondent. A droite, en haut, on voit un réservoir de chaleur qui peut transmettre de la chaleur au gaz de façon réversible. Le réservoir et le cylindre sont rigidement liés l'un à l'autre, c.-à-d. que les deux sont au repos dans K'.

du point matériel, l'énergie et impulsion totales du système qui ne forment plus un quadrivecteur se transforment d'après les formules de transformation des tenseurs. On doit, par suite, rechercher l'expression du tenseur énergie-impulsion de corps macroscopiques considérés comme continus.

44. Tenseur énergie-impulsion des corps macroscopiques. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage de Landau et Lifchitz, *Théorie des champs*, § 35, où l'on donne les détails sur ce tenseur. Dans le présent ouvrage, on se contente de donner quelques suggestions et analogies. Au chapitre V, § 41, il a été considéré le tenseur énergie-impulsion d'un champ électromagnétique. Dans chaque point d'un corps subissant des déformations élastiques, le tenseur est composé des grandeurs suivantes: tensions élastiques, flux d'énergie, densité d'impulsion et densité d'énergie. En considérant un corps de volume infiniment petit dans le référentiel où il est au repos (repère propre), la densité d'impulsion et le flux d'énergie, liés dans ce cas par [comp. avec (V, 131)]

$$\boldsymbol{S} = c^2 \boldsymbol{g},$$

s'annulent. Les tensions élastiques sont liées à la déformation du corps et l'énergie à la masse. Ainsi donc, pour l'élément de volume donné du corps dans le référentiel en comouvement, le tenseur énergie-impulsion-élasticité a la forme :

$$T'_{ik}=\begin{pmatrix} p'_{11} & p'_{12} & p'_{13} & 0 \\ p'_{21} & p'_{22} & p'_{23} & 0 \\ p'_{31} & p'_{32} & p'_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon' \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Dans cette formule, les composantes spatiales forment un tenseur tridimensionnel symétrique d'élasticité ; la composante T_{44} représente la densité d'énergie ε'. La quantité $\frac{\varepsilon'}{c^2}$ est la masse de l'unité de volume du corps.

A l'aide des formules générales de transformation des composantes du tenseur (Appendice, 31), on peut écrire l'expression du tenseur T_{ik} dans un référentiel quelconque :

$$T_{ik}=\begin{pmatrix} \Gamma^2(p'_{11}-B^2\varepsilon') & \Gamma p'_{12} & \Gamma p'_{13} & -\Gamma^2 iB(\varepsilon'-p'_{11}) \\ \Gamma p'_{21} & p'_{22} & p'_{23} & -\Gamma iBp'_{12} \\ \Gamma p'_{31} & p'_{32} & p'_{33} & -\Gamma iBp'_{31} \\ -\Gamma^2 iB(\varepsilon'-p'_{11}) & -\Gamma iBp'_{21} & -i\Gamma Bp'_{31} & \Gamma^2(\varepsilon'-B^2p'_{11}) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

On se servira plus tard du tenseur (9). Il devient plus simple dans le cas du gaz ou du liquide, car le tenseur élastique tridimensionnel se réduit dans ce cas à la pression omnidirectionnelle de sorte que

$$p'_{\alpha\beta}=-p'\delta_{\alpha\beta}; \tag{10}$$

le signe « moins » témoigne de la compression omnidirectionnelle. Par conséquent, le tenseur énergie-impulsion-élasticité (8) pour le gaz ou le liquide s'écrit dans le référentiel en comouvement

$$T'_{ik}=\begin{pmatrix} -p' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon' \end{pmatrix}, \tag{11}$$

et dans un référentiel quelconque [voir (9)]

$$T_{ik}=\begin{pmatrix} -\Gamma^2(p'+B^2\varepsilon') & 0 & 0 & -\Gamma^2 iB(\varepsilon'+p') \\ 0 & -p' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p' & 0 \\ -iB\Gamma^2(\varepsilon'+p') & 0 & 0 & \Gamma^2(\varepsilon'+B^2p') \end{pmatrix}. \tag{12}$$

En tenant compte des formules du chapitre V pour les composantes de la densité d'impulsion et de la densité d'énergie

$$g_\alpha = \frac{i}{c} T_{\alpha 4}, \quad \varepsilon = T_{44},$$

il vient [vu que $\boldsymbol{V}(V, 0, 0)$]

$$\boldsymbol{g} = \Gamma^2 \frac{\boldsymbol{V}}{c} (\varepsilon' + p'), \tag{13}$$

$$\varepsilon = \Gamma^2 (\varepsilon' + B^2 p'). \tag{14}$$

A proprement parler, tout élément de volume du liquide a son référentiel en comouvement qui se déplace à la vitesse V dans un repère « immobile », depuis lequel on étudie le mouvement du liquide. Dans notre cas où tous les éléments du gaz se déplacent avec la même vitesse, les formules (13) et (14) s'appliquent à tous les éléments du liquide. Il s'ensuit alors que l'énergie totale et l'impulsion résultante du gaz en mouvement sont données par le produit de (13) et (14) par le volume de gaz $\mathfrak{V}$, ce dernier étant lié à $\mathfrak{V}'$ par la relation (III, 2) :

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{V}'}{\Gamma}. \tag{15}$$

Après la multiplication, il vient :

$$\boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{g}\mathfrak{V} = \Gamma \frac{\boldsymbol{V}}{c^2} (E' + p'\mathfrak{V}'), \quad E' = \varepsilon'\mathfrak{V}', \tag{16}$$

$$E \equiv \varepsilon\mathfrak{V} = \Gamma (E' + B^2 p'\mathfrak{V}'). \tag{17}$$

Il est évident des formules obtenues que l'énergie totale et l'impulsion résultante du liquide dans le cylindre ne forment pas un quadrivecteur. Cela est dû à ce que le gaz, enfermé dans le récipient, n'est pas par lui-même un système isolé : il est soumis à l'action des forces de la part des parois du cylindre. Au paragraphe 49, on spécifiera les conditions sous lesquelles les composantes $T_{\alpha 4}$ forment un quadrivecteur. Dans le cas présent, les composantes du tenseur ne s'annulent pas sur les surfaces limitant le système.

Les formules (16) et (17) permettent de transformer l'expression du premier principe de la thermodynamique (2). Nous donnerons ici la méthode conduisant au résultat obtenu par Planck et Hasenorle. Cette méthode fut reproduite dans l'aperçu d'Einstein (1907). Soixante ans après, une discussion très animée fut soulevée autour des résultats de Planck, qui semblaient erronés à beaucoup de chercheurs. Or, cette discussion est très instructive. Voilà pourquoi, on se propose d'abord de présenter les conclusions de Planck et d'Einstein, ensuite celles d'autres savants et, finalement, d'indiquer la cause des résultats différents.

Dans le repère K, le premier principe s'écrira

$$\Delta Q = \Delta E - \Delta A \tag{18}$$

où

$$\Delta A = -p\, d\mathfrak{V} + V\, dG. \tag{19}$$

Le premier terme de (19) représente le travail de dilatation du gaz lors de la variation du volume, le deuxième est le travail des forces extérieures appliquées au système. En effet, d'après le principe fondamental de Newton, on a

$$\frac{dG}{dt} = F,$$

où G est l'impulsion résultante du système et F la force résultante qui agit sur le système. Dans le référentiel K, le cylindre se déplace avec la vitesse V, le travail de la force F en unité de temps ($dt = 1$) est donc égal à

$$FV = V\, dG. \tag{20}$$

C'est justement l'expression qui fait partie de (19). D'après l'expression du tenseur T_{ik} (12), la pression p est l'invariant de la transformation de Lorentz, c.-à-d. $p' = p$. D'où

$$p\, d\mathfrak{V} = p' \frac{d\mathfrak{V}'}{\Gamma}. \tag{21}$$

L'expression $p'\, d\mathfrak{V}'$ est égale au travail de dilatation du système dans K'. Donc, $p'\, d\mathfrak{V}' = \Delta A'$. On tire de (17), (16) et (21)

$$\Delta E = \Gamma\, [\Delta E' + B^2 \Delta\, (p'\mathfrak{V}')], \tag{22}$$

$$\Delta G = \Gamma \frac{V}{c^2} [\Delta E' + \Delta\, (p'\mathfrak{V}')], \tag{23}$$

$$p\, d\mathfrak{V} = \frac{\Delta A'}{\Gamma}.$$

Multipliant (23) par V et portant les expressions obtenues dans (19), on a

$$\Delta A = \Gamma B^2 [\Delta E' + \Delta\, (p'\mathfrak{V}')] + \frac{\Delta A'}{\Gamma}. \tag{24}$$

Comme

$$\Delta Q = \Delta E - V\, dG + p\, dV,$$

il vient immédiatement

$$\Delta Q = \frac{1}{\Gamma} (\Delta E' - \Delta A') = \frac{\Delta Q'}{\Gamma}. \tag{25}$$

C'est bien la formule de Planck qui fut acharnement discutée. On a mis en évidence que le travail des forces extérieures n'était pas bien calculé. Le travail des forces mécaniques n'est pas toujours égal à $V\, dG\, dt$. Pour le voir, il faut calculer le travail ΔA dans le cas concret. C'est bien ce qu'on va faire.

45. Calcul direct du travail pour un processus réversible quelconque*). Revenons à la figure 20. Dans le repère en comouvement K', l'axe du cylindre qui contient le gaz coïncide avec l'axe des x' ; la base a se confond avec le plan (y', z'), donc $x'_a = 0$. Avant le processus, le piston b se trouvait au point $x'_b(0) = l'$. Comme d'habitude, le repère K' se déplace avec la vitesse V par rapport à K le long de l'axe des x, x'. Les aires de la base a et du piston b sont égales: $F'_a = F'_b = F'$ et elles ne varient pas dans le repère K: $F = F'$ (car les dimensions du corps transversales au mouvement ne changent pas). Le volume de gaz dans K' est égal à $\mathfrak{V}' = F'l'$. Les volumes de gaz dans K et K' sont reliés par la formule (III, 2) $\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{V}'}{\Gamma}$.

Soit le gaz en équilibre thermodynamique en l'absence de tout échange de chaleur. Il est évident que dans le repère K' la pression dans le cylindre est partout la même, en particulier, sur le piston et sur la base:

$$p'_a = p'_b = p'. \tag{26}$$

Les forces appliquées à la base a et au piston b suivent l'axe des x et sont égales à $p'F'$ et $-p'F'$ respectivement. Si, dans K', la base et le piston sont immobiles, ces forces n'effectuent pas de travail.

Il sera utile d'analyser du point de vue énergétique ce qui se passe sur la base et le piston depuis le repère K. Comme les forces dirigées le long de l'axe des x demeurent invariables, a et b, dans le repère K, sont également soumis aux forces pF et $-pF$ (rappelons que la pression est l'invariant du groupe de Lorentz). Mais, dans le repère K, la base et le piston se meuvent à la vitesse V à droite, d'où le travail effectué sur la base a est égal à pFV et sur le piston b à $-pFV$. Cela veut dire que le gaz reçoit à travers la base a en unité de temps l'énergie pFV et perd l'énergie pFV à travers le piston b. Au total, l'énergie du gaz ne varie pas; nous avons tenu compte de tout l'ensemble de travail appliqué au gaz: la pression et la force agissant sur le gaz de la part des parois latérales du cylindre sont orthogonales à la direction du mouvement et ne produisent donc pas de travail.

Il est fort intéressant de suivre l'apparition du flux d'énergie traversant le gaz. L'expression générale du tenseur (12) montre que le repère K ne possède qu'une seule composante du flux d'énergie $S_x = icT_{41} = \Gamma^2 V(\varepsilon' + p')$. Transformons l'expression $\varepsilon' + p'$ en profitant de (13) et (14) de la manière suivante:

$$\varepsilon' + p' = \varepsilon' + \mathrm{B}^2 p' + p' - \mathrm{B}^2 p' = \frac{\varepsilon}{\Gamma^2} + p'(1 - \mathrm{B}^2) = \frac{\varepsilon + p}{\Gamma^2}.$$

Il est évident alors que

$$\boldsymbol{S} = (\varepsilon + p)\boldsymbol{V}. \tag{27}$$

Le flux d'énergie qui traverse la section F équivaut à

$$F(\varepsilon + p)V. \tag{28}$$

Selon l'expression (28), le flux d'énergie à travers la section immobile dans K est composé de l'énergie $F\varepsilon V$, portée directement par le milieu, et du flux qui apparaît aux dépens du travail de la pression sur la base et sur le piston du cylindre.

Maintenant, nous passons à la considération de la variation réversible finie arbitraire de l'état du système quand le volume de gaz $\mathfrak{V}'$ et sa pression p' varient de $\Delta\mathfrak{V}'$ et $\Delta p'$. Cela est dû au mouvement du piston b, la base a restant immobile. Il ne s'agit pour le moment que du repère en comouvement K'. Donc,

---

*) Dans ce paragraphe, on se base sur l'ouvrage de Möller cité dans la bibliographie.

$x'_a=0$, tandis que x'_b passe au cours du processus de $x'_b=l'$ à $x'_b=l'+\Delta l'$ où $\Delta l' = \frac{\Delta\mathfrak{V}'}{F'}$. Dans le repère K', le processus commence à l'instant $t'=0$ et finit à l'instant $t'=\tau'$. Le déplacement du piston est arbitraire mais, pour que le processus soit réversible, il faut que la translation du piston soit lente. La position du piston dans l'intervalle de $t'=0$ à $t'=\tau'$ est donnée par la fonction $\varphi(t')$ qui peut ne pas être explicite:

$$x'_b(t')=\varphi(t')=\begin{cases} l' & \text{pour } t'\leqslant 0, \\ \varphi(t') & \text{pour } 0\leqslant t'\leqslant\tau', \\ l'+\Delta l' & \text{pour } t'>\tau'. \end{cases} \tag{29}$$

Il est évident que la vitesse du piston est définie par la dérivée

$$u'_b=\frac{dx'_b}{dt'}=\frac{d\varphi(t')}{dt'} \tag{30}$$

qui, conformément à (29), n'est différente de zéro que dans l'intervalle $0\leqslant \leqslant t'\leqslant\tau'$. L'exigence de la réversibilité du processus limite la valeur de la vitesse qui doit être petite, ce qui sous-entend une grande valeur de τ'.

On suppose que, dans ce processus, l'échange réversible de chaleur ne soit pas exclu. Une certaine quantité de chaleur $\Delta Q'$ peut être transmise au gaz de façon réversible à travers les parois du cylindre qui sont en contact avec le réservoir de chaleur se déplaçant avec le cylindre, donc immobile dans K'. La réversibilité du processus de l'échange de chaleur n'est possible qu'à une très faible (infiniment petite) différence de température entre le réservoir et le gaz à tout instant. Cette condition étant remplie, on peut admettre que le gaz passe par une suite des états d'équilibre, ce qui signifie que, dans K', la pression du gaz est la même dans tous les points du volume $\mathfrak{V}'$ et, en particulier, dans tous les points de la base a et du piston b à tout instant t':

$$p'_a(t')=p'_b(t')=f(t'), \tag{31}$$

la fonction $f(t')$ étant définie par la loi du mouvement du piston et par la vitesse de l'échange de chaleur avec le réservoir. Nous admettons qu'au cours du processus la pression s'accroît de p' à $p'+\Delta p'$ au bout du temps τ', par conséquent,

$$f(t')=\begin{cases} p' & \text{pour } t'\leqslant 0, \\ p'+\Delta p' & \text{pour } t'\geqslant\tau'. \end{cases} \tag{32}$$

On n'a pas besoin des valeurs de $f(t')$ dans l'intervalle $0\leqslant t'\leqslant\tau'$.

A. Calculons le travail mécanique effectué sur le gaz dans le processus considéré par rapport au repère K'. Ici, seul le piston b se déplace; il vient alors

$$\Delta A'=-F'\int_0^{\tau'} p'_b(t')\,u'_b(t')\,dt'=-F'\int_0^{\tau'} f(t')\,\frac{d\varphi(t')}{dt'}\,dt'. \tag{33}$$

Il nous suffit d'avoir cette expression générale.

B. Ce même processus doit être étudié du point de vue du référentiel K pour trouver le travail mécanique ΔA accompli dans ce repère.

Des formules de transformation (II, 17) de tout événement (x', y', z', t') il découle $t=\Gamma\left(t'+\frac{\mathrm{B}}{c}x'\right)$, $y=y'$, $z=z'$.

Comme d'habitude, choisissons les instants initiaux ($t=t'=0$) de façon à faire coïncider les origines O et O' de K et K'. On s'intéresse aux événements

associés aux positions successives de la base a et du piston b, c.-à-d. aux événements (x'_a, t'_a), (x'_b, t'_b). Les notations t'_a et t'_b traduisent le fait que les positions de a et b ne sont pas simultanées en K'. Pour toute position de a $(x'_a = 0)$:

$$t_a = \Gamma t'_a, \qquad dt_a = \Gamma\, dt'_a. \tag{34}$$

Pour toute position de b:

$$t_b = \Gamma \left(t'_b + \frac{\mathrm{B}}{c} x'_b\right) = \Gamma \left(t'_b + \frac{\mathrm{B}}{c} \varphi(t'_b)\right),$$

$$dt_b = \Gamma \left(1 + \frac{\mathrm{B}}{c} \frac{d\varphi(t'_b)}{dt'_b}\right) dt'_b = \Gamma \left(1 + \frac{\mathrm{B}}{c} u'_b\right) dt'_b. \tag{35}$$

D'après la formule de la transformation relativiste des vitesses (III, 6) on trouve la vitesse de la base a et du piston b dans le repère K:

$$u_a = V, \qquad u_b = \frac{V + \dfrac{d\varphi(t'_b)}{dt'_b}}{1 + \dfrac{\mathrm{B}}{c} \dfrac{d\varphi(t'_b)}{dt'_b}}. \tag{36}$$

Nous écrivons les déplacements de la base et du piston $u_a dt_a$ et $u_b dt_b$, dont nous nous servirons plus tard pour le calcul du travail:

$$u_a\, dt_a = \Gamma V\, dt'_a, \qquad u_b\, dt_b = \Gamma \left(V + \frac{d\varphi(t'_b)}{dt'_b}\right) dt'_b. \tag{37}$$

Comme la pression représente un scalaire, il vient qu'aux instants t_a et t'_a, reliés par (34), on a pour la base a

$$p_a(t_a) = p'_a(t'_a) = f(t'_a), \tag{38}$$

la dernière égalité étant la conséquence de (32). De façon analogue, on écrit pour le piston b

$$p_b(t_b) = p'_b(t'_b) = f(t'_b). \tag{39}$$

Il est très essentiel que l'on considère les événements affectant deux points différents de l'espace; c'est pourquoi deux événements simultanés en K ne le sont plus en K'. Supposons que l'on mesure simultanément dans K' les pressions aux points a et b, c.-à-d. qu'on pose $t'_a = t'_b = 0$. Alors (34) et (35) montrent que $t_a \neq t_b$. De (38) et (39) vient que $p_a(t_a) \neq p_b(t_b)$, ce qui signifie, du point de vue de K, que $p_a(t) \neq p_b(t)$. Il en découle que dans l'état de l'équilibre thermodynamique les pressions simultanées dans K ne sont pas les mêmes pour différentes sections du cylindre !

Il nous est plus commode pour le calcul du travail d'envisager les événements simultanés sur la base et le piston dans le repère K (en principe, on pourrait au même titre considérer les événements simultanés dans le repère K'). L'instant $t_a = t_b = 0$ correspond, conformément à (34) et (35), aux instants:

$$t'_a = 0, \qquad t'_b = -\frac{\mathrm{B}}{c} l'. \tag{40}$$

Cela veut dire que le piston était au repos tant à cet instant qu'auparavant et que

$$p_a(t) = p_b(t) = p = p'. \tag{41}$$

Envisageons l'instant τ' de la fin du processus en K', c.-à-d. l'événement $(x'_b = l' + \Delta l',\ t'_b = \tau')$. A cet événement correspond, dans le repère K, l'instant

$$\tau = \Gamma \left[\tau' + \frac{\mathrm{B}}{c} (l' + \Delta l') \right]. \tag{42}$$

Que se passe-t-il dans K' aux points a et b à cet instant (c.-à-d. à l'instant $t_a = t_b = \tau$)? Selon (34)

$$t'_a \equiv \tau'_a = \frac{1}{\Gamma} t_a = \tau' + \frac{\mathrm{B}}{c} (l' + \Delta l'). \tag{43}$$

Pour t'_b, on a par définition $t'_b = \tau'$.

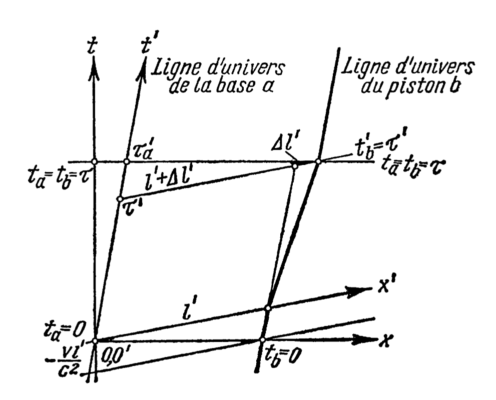


Fig. 21. Illustration géométrique des différents instants entrant dans le calcul du travail exercé sur le gaz dans les repères K et K'. La composition exige des connaissances de la matière exposée au début du chapitre VIII. L'axe $O't$ représente la ligne d'univers de la base a. A droite, la ligne brisée grasse représente la ligne d'univers du piston b. Pour simplifier, on pose que ce dernier est en mouvement uniforme pendant l'intervalle de temps $0 \leqslant t' \leqslant \tau'$. En dehors de cet intervalle, la ligne d'univers du piston b est une droite parallèle à l'axe $O't'$. La coordonnée du piston varie de $x'_b = l'$ (pour $t'_b = 0$) à $x'_b = l' + \Delta l'$ (pour $t'_b = \tau'$). A l'instant $t'_b = \tau'$ correspondent, dans le repère K, les instants $t_a = t_b = \tau$. Notons que $t'_a = \tau'_a$ et $\tau' < \tau'_a$.

Les résultats obtenus sont récapitulés en un tableau; l'interprétation géométrique est donnée sur la figure 21.

	Début du processus		Fin du processus	
	Base a	Piston b	Base a	Piston b
Repère K	$t = 0$	$t = 0$	$t = \tau$	$t = \tau$
Repère K'	$t' = 0$	$t' = -\frac{V}{c^2} l'$	τ'_a	τ'

Maintenant il est possible de calculer le travail effectué sur la base et le piston. Pour la base a on a

$$\Delta A_a = \int_0^{\tau} F p_a(t_a)\, u_a\, dt_a = \Gamma F' V \int_0^{\tau'_a} f(t')\, dt' \tag{44}$$

conformément à (38) et (37). Mais vu que $\tau'_a = \tau' + \frac{B}{c}(l' + \Delta l')$ et la pression $f(t') = p' + \Delta p'$ ne varie pas pendant l'intervalle $\tau' \leqslant t' \leqslant \tau'_a$, il vient:

$$\Delta A_a = \Gamma F' V \int_0^{\tau'} f(t')\, dt' + \Gamma F' V \int_{\tau'}^{\tau'_a} (p' + \Delta p')\, dt' =$$

$$= \Gamma F' V \int_0^{\tau'} f(t')\, dt' + \Gamma F' V \frac{B}{c}(l' + \Delta l')(p' + \Delta p') =$$

$$= \Gamma F' V \int_0^{\tau'} f(t')\, dt' + \Gamma B^2 (p' + \Delta p')(\mathfrak{B}' + \Delta\mathfrak{B}'). \tag{45}$$

Le travail pour le piston b (en tenant compte de ce que pendant l'intervalle de temps $-\frac{Vl'}{c^2} \leqslant t' \leqslant 0$ la pression ne varie pas: $f(t') = p'$, et que le piston est immobile: $u'_b = 0$) se calcule de la façon suivante:

$$\Delta A_b = -\int_0^{\tau} F p_b(t_b)\, u_b\, dt_b = -\Gamma F' \int_{-Vl'/c^2}^{\tau'} f(t'_b)\left[V + \frac{d\varphi(t'_b)}{dt'_b}\right] dt'_b =$$

$$= -\Gamma F' \int_{-Vl'/c^2}^{0} p' V\, dt' - \Gamma F' \int_0^{\tau'} f(t')\left[V + \frac{d\varphi(t'_b)}{dt'_b}\right] dt'_b =$$

$$= \Gamma F' p' V \frac{Vl'}{c^2} + \Gamma \Delta A' - \Gamma F' V \int_0^{\tau'} f(t')\, dt',$$

où l'on s'est adressé à (33). Ainsi,

$$\Delta A_b = -\Gamma B^2 p' \mathfrak{B}' - \Gamma F' V \int_0^{\tau'} f(t')\, dt' + \Gamma \Delta A'. \tag{46}$$

On se rappelle que la pression agissant sur les parois latérales n'effectue pas de travail, et le travail total des forces extérieures appliquées au système, compte tenu de la notation

$$\Delta(p'\mathfrak{B}') = (p' + \Delta p')(\mathfrak{B}' + \Delta\mathfrak{B}') - p'\mathfrak{B}', \tag{47}$$

est égal à

$$\Delta A = \Delta A_a + \Delta A_b = \Gamma\,[B^2 \Delta(p'\mathfrak{B}') + \Delta A']. \tag{48}$$

C'est bien la formule générale du travail d'un processus réversible arbitraire. Il est intéressant que, d'après cette formule, le travail des forces exté-

rieures n'est pas nul même si le volume ne varie pas ($\Delta\mathfrak{B}' = 0$). Dans ce cas, $\Delta A' = 0$ et le travail produit dans le repère K est égal à:

$$\Delta A = \Gamma \mathrm{B}^2 \mathfrak{B}' \, \Delta p'.$$

Certes, il est dû uniquement à l'échauffement, quand la pression dépend du temps; en fait, l'origine de ce travail réside dans la relativité de la simultanéité (pressions différentes aux niveaux de la base a et du piston b).

L'expression générale du travail d'un processus réversible permet d'obtenir, du premier principe, la formule de transformation de ΔQ. D'après (2) et (22), on a:

$$\Delta Q = \Delta E - \Delta A = \Gamma [\Delta E' - \mathrm{B}^2 \Delta (p'\mathfrak{B}')] - \Gamma [\mathrm{B}^2 \Delta (p'\mathfrak{B}') + \Delta A'] =$$
$$= \Gamma (\Delta E' - \Delta A') = \Gamma \Delta Q'. \quad (49)$$

Cette expression de la transformation de la chaleur reçue par le système, diffère de celle de Planck et d'Einstein de facteur $\frac{1}{\Gamma^2}$. Ainsi donc, il s'est avéré que le travail (48) calculé directement

$$\Delta A_M = \Gamma [\mathrm{B}^2 \Delta (p'\mathfrak{B}') + \Delta A']$$

n'est pas du tout égal au travail (24):

$$\Delta A_P = \Gamma \mathrm{B}^2 [\Delta E' + \Delta (p'\mathfrak{B}')] + \frac{\Delta A'}{\Gamma}.$$

Trouvons donc la différence entre ces deux expressions:

$$\Delta A_P - \Delta A_M = \frac{\Delta A'}{\Gamma} + \Gamma \mathrm{B}^2 [\Delta E' + \Delta (p'\mathfrak{B}')] -$$
$$- \Gamma \mathrm{B}^2 \Delta (p'\mathfrak{B}') - \Gamma \Delta A' = \Delta A' \left(\frac{1}{\Gamma} - \Gamma \right) + \Gamma \mathrm{B}^2 (\Delta A' + \Delta Q') = \Gamma \mathrm{B}^2 \Delta Q'. \quad (50)$$

46. Calcul de l'impulsion acquise par le système aux dépens du travail des forces mécaniques. Où réside la cause de la divergence entre le travail calculé par Planck et celui calculé par Möller ? Pour répondre à cette question, calculons directement l'impulsion mécanique totale gagnée par le système au cours du processus. Cette quantité s'obtient comme l'intégrale de temps sur la résultante des forces mécaniques appliquées au liquide de la part des parois du cylindre.

Il est facile de s'assurer que l'accroissement de l'impulsion qui découle de l'action des forces sur les parois latérales du cylindre est nul. En effet, à tout instant donné, lors d'un processus réversible le gaz est en état d'équilibre et la pression sur les parois latérales pour toute section transversale où $x = \text{const}$ est la même (bien que, pour les différentes coordonnées x, elle ne soit pas la même). Par conséquent,

$$\Delta J_y = \Delta J_z = 0. \quad (51)$$

La composante de l'accroissement de l'impulsion suivant l'axe des x est égale à la somme des accroissements dus à l'action des forces aux niveaux de a et b:

$$\Delta J_x = \Delta J_a + \Delta J_b. \quad (52)$$

La force exercée de la part de la base a est dirigée le long de l'axe des x et est égale à $K_a(t) = Fp_a(t)$. C'est pourquoi [voir (37), (38)]

$$\Delta J_a = F\int_0^{\tau} p_a(t_a)\,dt_a = \Gamma F'\int_0^{\tau'_a} f(t')\,dt' = \frac{\Delta A_a}{V} \tag{53}$$

conformément à (44).

La force appliquée par le piston b est égale à $K_b(t) = -Fp_b(t)$ d'où

$$\Delta J_b = -F\int_0^{\tau} p_b(t_b)\,dt_b = -F'\int_{-Vl'/c^2}^{\tau'} p'_b(t'_b)\frac{dt_b}{dt'_b}\,dt'_b =$$

$$= -F'\Gamma\int_{-Vl'/c^2}^{\tau'} f(t')\left[1+\frac{V}{c^2}\frac{d\varphi(t')}{dt'}\right]dt' =$$

$$= -\Gamma F'\int_{-Vl'/c^2}^{\tau'} f(t')\,dt' - \Gamma F'\frac{V}{c^2}\int_{-Vl'/c^2}^{\tau'} f(t')\frac{d\varphi(t')}{dt'}\,dt' =$$

$$= -\Gamma F'\int_{-Vl'/c^2}^{0} f(t')\,dt' - \Gamma F'\int_0^{\tau'} f(t')\,dt' - \Gamma F'\frac{V}{c^2}\int_0^{\tau'} f(t')\frac{d\varphi(t')}{dt'}\,dt' =$$

$$= -\Gamma F'\frac{p'Vl'}{c^2} - \Gamma F'\int_0^{\tau'} f(t')\,dt' + \Gamma\frac{V}{c^2}\Delta A'. \tag{54}$$

Donc,

$$\Delta J_b = -\Gamma\frac{V}{c^2}p'\mathfrak{B}' - \Gamma F'\int_0^{\tau'} f(t')\,dt' + \Gamma\frac{V}{c^2}\Delta A'. \tag{55}$$

Compte tenu de l'expression développée pour ΔA_b (45), nous obtenons

$$\Delta J_x = \Delta J_a + \Delta J_b = \Gamma\frac{V}{c^2}[\Delta(p'\mathfrak{B}') + \Delta A'], \tag{56}$$

et comme $\boldsymbol{V}(V, 0, 0)$, on a finalement

$$\Delta\boldsymbol{J} = \Gamma\frac{\boldsymbol{V}}{c^2}[\Delta(p'\mathfrak{B}') + \Delta A']. \tag{57}$$

C'est l'accroissement total de l'impulsion mécanique qui vient du calcul direct des forces appliquées au système. Cette expression ne coïncide pas avec l'accroissement de l'impulsion résultante du système, donné par la formule :

$$\Delta\boldsymbol{G} = \Gamma\frac{\boldsymbol{V}}{c^2}[\Delta(p'\mathfrak{B}') + \Delta E']. \tag{58}$$

On arrive à la conclusion que la variation de l'impulsion décrite par (58) inclut non seulement la variation due aux forces appliquées

au système. La différence des expressions (58) et (57), qu'on désigne par $\Delta G^{(h)}$, donne

$$\Delta G^{(h)} \equiv \Delta G - \Delta J = \Gamma \Delta Q' \frac{V}{c^2} = \frac{\Delta Q}{c^2} V. \qquad (59)$$

Cette partie de l'accroissement de l'impulsion est liée au transfert de chaleur et non pas à l'exécution du travail mécanique. La valeur de l'impulsion transmise au système lors de l'apport réversible de la chaleur a une signification physique simple. Tout se passe comme si l'on avait ajouté au système thermodynamique dans K' la masse au repos $\frac{\Delta Q'}{c^2}$. Ce résultat est en accord parfait avec la relation générale d'Einstein entre la masse et l'énergie.

Il découle des formules (57) et (59) que dans le repère K'

$$\Delta J' = 0, \quad \Delta G^{(h)} = 0. \qquad (60)$$

La deuxième relation traduit le fait que l'accroissement de l'impulsion, lié au transfert de la chaleur lors du processus réversible dans le repère où le système considéré est au repos, est égal à zéro. D'après les formules (60) et (59) il vient également que l'ensemble de quantités

$$\left(\Delta G^{(h)}, \frac{i}{c} \Delta Q \right) \qquad (61)$$

se comporte par rapport à la transformation de Lorentz comme un quadrivecteur.

Il devient maintenant tout à fait évident la raison de la différence entre l'expression de travail d'après Möller:

$$\Delta A_M = \Gamma \mathrm{B}^2 [\Delta (p' \mathfrak{B}') + \Delta A'] = \Delta J V$$

et celle de Planck et d'autres chercheurs:

$$\Delta A_P = \Gamma \mathrm{B}^2 [\Delta (p' \mathfrak{B}') + \Delta E'] = \Delta G V.$$

L'accroissement total de l'impulsion comporte également celui dû à l'échange de chaleur. Mais ce dernier accroissement n'est pas lié au travail des forces mécaniques, qui est seul à prendre en considération dans le premier principe de la thermodynamique.

La discussion concernant les transformations de la température et de la quantité de chaleur aboutit à ce qui suit. Le principe de la relativité n'amène pas par lui-même d'une façon univoque à la notion de température attachée à un repère quelconque. La loi de transformation de la température dépend des relations thermodynamiques qui, étant valables dans leur propre référentiel, demeurent invariables par la transformation de Lorentz. En outre, toutes les relations ci-dessus ne se rapportaient qu'au cas particulier d'un corps isotrope homogène. Le cas général s'avère plus compliqué. Donc, les formules de transformation de la température et de la quantité de chaleur ne sont pas de caractère général et changent selon les hypothèses émises.

CHAPITRE VII

LA LUMIÈRE ET LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

Les phénomènes optiques jouent un rôle particulier en Relativité restreinte. On a déjà souligné que la vitesse de la lumière dans le vide représente la limite supérieure de la vitesse de transmission d'un signal et qu'elle est inaccessible aux corps qui possèdent une masse au repos non nulle. Les équations des ondes lumineuses doivent être inévitablement relativistes. Il n'y a donc rien d'étonnant que les équations de Maxwell qui décrivent entre autres les ondes électromagnétiques (i.e. les ondes lumineuses, en particulier) se sont avérées invariantes dans le sens relativiste, comme cela est mis en évidence dans le chapitre V. Comme le système de référence est toujours lié aux corps matériels, sa vitesse est toujours inférieure à celle de la lumière dans le vide, cette dernière ayant la même valeur universelle, quel que soit le référentiel d'inertie.

47. Propriétés d'une onde lumineuse plane. Dans un milieu homogène ($\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$), dont la conductibilité σ est nulle, les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ (ainsi que $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{B}$ qui leur sont proportionnels) satisfont, d'après Maxwell, aux équations des ondes suivantes:

$$\Box\, \boldsymbol{E} \equiv \Delta \boldsymbol{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

$$\Box\, \boldsymbol{H} \equiv \Delta \boldsymbol{H} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

Il s'ensuit que dans un milieu homogène non conducteur se propagent les ondes dont la vitesse de phase $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ dépend uniquement des propriétés du milieu. L'une des solutions possibles des équations (1) et (2) représente les ondes planes:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \tag{3}$$

où ω est la pulsation [on suppose que les vecteurs champs soient les fonctions harmoniques du temps et le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ soit normal à la surface de phases égales (front d'onde)]. Les équations (1) et (2) fournissent la valeur absolue du vecteur d'onde: $k = \frac{\omega}{c}$. L'équation

de la surface de phase égale $\boldsymbol{kr}$ = const décrit un plan dont le vecteur normal suit $\boldsymbol{k}$; le vecteur $\boldsymbol{r}$ est le rayon vecteur tridimensionnel usuel.

Les expressions (3) doivent satisfaire non seulement aux équations des ondes (1) et (2) mais aussi aux équations de Maxwell (V, 88) et (V, 89) ; en introduisant (3) dans les équations de Maxwell, on obtient les résultats suivants. L'onde plane se propageant dans un milieu homogène possède les vecteurs $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{k}$ qui constituent un trièdre droit trirectangle. Cela veut dire qu'ils sont mutuellement perpendiculaires et le produit vectoriel de n'importe quel couple, effectué dans le sens indiqué, définit le troisième vecteur.

Les amplitudes sont reliées par la formule $\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E$, c.-à-d. que pour le vide où $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, on a $E = cB$.

Le vecteur de Poynting $\boldsymbol{S}$ est dirigé suivant le vecteur $\boldsymbol{k}$; sa valeur absolue est égale au produit de la densité d'énergie de l'onde plane par la vitesse de propagation v, i.e. $S = wv$ où w est la densité d'énergie de l'onde électromagnétique. La signification physique en est la suivante : le vecteur de Poynting définit le flux d'énergie traversant par unité de temps une unité de surface disposée perpendiculairement à l'onde incidente. Or, à travers cette unité de surface, il passe, en unité de temps, toute l'énergie enfermée dans le cylindre dont la directrice est le contour de cette surface et les génératrices sont les droites parallèles à la direction de la propagation de l'onde. La hauteur de ce cylindre est v. La valeur de cette dernière détermine dans ce cas le volume du cylindre ainsi construit et le produit vw l'énergie d'un champ électromagnétique qui y est enfermée. Tous ces raisonnements aboutissent à $S = vw$. Notons encore que pour l'onde plane :

$$w = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2} = \varepsilon E^2$$

et que dans le vide $w_0 = \varepsilon_0 E^2$.

L'impulsion pour unité de volume (densité d'impulsion) $\boldsymbol{g}$ d'un champ électromagnétique est égale à $\frac{\boldsymbol{S}}{c^2}$. Pour l'onde plane, compte tenu de ce que dans le vide $S = cw$, nous avons $\boldsymbol{g} = \frac{w}{c}\frac{\boldsymbol{k}}{k}$. Signalons la relation entre les densités d'énergie et d'impulsion d'une onde électromagnétique :

$$g = \frac{w}{c}. \tag{4}$$

Quelles conséquences de la Relativité restreinte sont intéressantes s'il s'agit de l'onde plane ? Avant tout, les deux invariants I_1 et I_2 (V, 59) s'annulent pour le cas de l'onde plane. Il en découle que, dans tout repère, les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ de l'onde plane sont orthogonaux et le rapport entre leurs amplitudes se conserve. Dans le référentiel

K', l'onde plane est de la forme:

$$E' = E'_0 e^{i(\omega' t' - k' r')}. \tag{5}$$

L'état de l'onde plane dans le point d'univers $\vec{R}(\boldsymbol{r}, ict)$, défini par la phase de l'onde, ne doit pas dépendre du choix des référentiels, ce qui implique que la phase $\omega t - \boldsymbol{k r}$ est l'invariant de la transformation de Lorentz. Par conséquent,

$$\omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z'. \tag{6}$$

En portant les formules de transformation de x', y', z', t' (II, 8) dans le second membre de (6), nous obtenons

$$\omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \omega' \Gamma \left(t - \frac{\mathrm{B}}{c}\, x\right) - k'_x \Gamma (x - Vt) - k'_y y - k'_z z.$$

Cette équation doit représenter une identité par rapport à t, x, y, z. Vu que $k = \frac{\omega}{c}$ et $k_x = \frac{\omega}{c} s_x$, $k_y = \frac{\omega}{c} s_y$, $k_z = \frac{\omega}{c} s_z$ (s étant le vecteur unitaire colinéaire à $\boldsymbol{k}$), on a $\left(\boldsymbol{k}' = \frac{\omega'}{c}\, \boldsymbol{s}'\right)$:

$$\omega = \omega' \Gamma (1 + \mathrm{B} s'_x), \quad \omega s_x = \omega' \Gamma (\mathrm{B} + s'_x), \quad \omega s_y = \omega' s'_y, \quad \omega s_z = \omega' s'_z. \tag{7}$$

Les formules obtenues permettent aisément d'arriver aux formules décrivant l'*effet Doppler* (la variation de la longueur de l'onde émise par une source en mouvement par rapport à l'observateur) et l'aberration (la déviation du rayon lumineux lors d'un changement de référentiel). Cependant, il nous est plus commode de les obtenir d'une autre façon (voir § 48).

Analysons maintenant l'expression de la phase $\omega t - \boldsymbol{kr}$ du point de vue de l'espace quadridimensionnel. Cette phase, comme nous venons de le dire, doit être invariante. Par sa forme l'expression représente le produit scalaire de deux quadrivecteurs si, en plus du quadrivecteur rayon $\vec{R}(\boldsymbol{r}, ict)$, on introduit le quadrivecteur d'onde $\vec{k}\left(\boldsymbol{k},\ i\frac{\omega}{c}\right)$. D'où $\omega t - \boldsymbol{kr} = -\vec{k}\vec{R}$ et l'invariance de la phase est évidente, car le produit scalaire de deux quadrivecteurs est l'invariant de la transformation de Lorentz (voir Appendice, 2).

Quand on passe du référentiel K' au référentiel K, l'onde lumineuse plane change sa direction de propagation et sa fréquence. On verra que son amplitude change, elle aussi. Les formules de transformation des grandeurs caractérisant l'onde lumineuse s'obtiennent dans les référentiels K et K' si l'on tient compte de ce qu'en cas de l'onde lumineuse plane le vecteur d'onde usuel $\boldsymbol{k}$ forme avec $i\frac{\omega}{c}$ le quadrivecteur $\vec{k}$.

48. Quadrivecteur d'onde, effet Doppler et aberration de la lumière. Soit dans le repère K' l'onde lumineuse plane caractérisée par le quadrivecteur $\vec{k}'$; choisissons le repère K' tel que le rayon lumineux s'y propage dans le plan (x', y') en faisant l'angle ϑ' avec l'axe des x'. Ecrivons les composantes du quadrivecteur $\vec{k}'$:

$$k_1' = k' \cos\vartheta' = \frac{\omega'}{c}\cos\vartheta', \quad k_2' = k' \sin\vartheta' = \frac{\omega'}{c}\sin\vartheta',$$

$$k_3' = 0, \quad k_4' = i\frac{\omega'}{c} = ik'. \tag{8}$$

Cherchons les composantes du quadrivecteur $\vec{k}$ dans le repère K. Selon les formules générales (II, 27)

$$k_1 = \Gamma(k_1' - iBk_4'), \quad k_2 = k_2', \quad k_3 = k_3', \quad k_4 = \Gamma(k_4' + iBk_1'). \tag{9}$$

Avant tout on constate que le rayon ne sort non plus du plan (x, y) dans K, puisque $k_3 = 0$. De la formule (9) définissant k_4 nous tirons :

$$i\frac{\omega}{c} = \Gamma\left(i\frac{\omega'}{c} + iB\frac{\omega'}{c}\cos\vartheta'\right),$$

ou

$$\omega = \omega'\frac{1 + B\cos\vartheta'}{\sqrt{1-B^2}} = \omega'\Gamma(1 + B\cos\vartheta'). \tag{10}$$

Par suite, si dans le référentiel K' la pulsation de la lumière était égale à ω', dans K elle sera déduite de la formule (10) [comp. avec les formules (7)]. La première formule (9) donne:

$$\frac{\omega}{c}\cos\vartheta = \Gamma\left(\frac{\omega'}{c}\cos\vartheta' - iBi\frac{\omega'}{c}\right)$$

ou, en prenant en considération (10),

$$\cos\vartheta = \frac{\omega'}{\omega}\Gamma(\cos\vartheta' + B) = \frac{\cos\vartheta' + B}{1 + B\cos\vartheta'}. \tag{11}$$

De façon analogue et en tenant compte de l'expression (10), on tire de la seconde formule (9):

$$\sin\vartheta = \frac{\omega'}{\omega}\sin\vartheta' = \frac{\sqrt{1-B^2}}{1+B\cos\vartheta'}\sin\vartheta' = \frac{\sin\vartheta'}{\Gamma(1+B\cos\vartheta')}. \tag{12}$$

Moyennant les formules (11) et (12), il est facile d'exprimer $\sin\vartheta'$ en fonction de l'angle ϑ:

$$\sin\vartheta' = \frac{\sin\vartheta}{\Gamma(1 - B\cos\vartheta)}. \tag{12'}$$

Signalons que (12′) est obtenue de (12) par le remplacement des grandeurs primées par celles non primées et vice versa et par l'inversion du signe de V. Les formules déduites donnent une interpréta-

tion quantitative de deux phénomènes optiques qui sont l'effet Doppler et l'aberration de la lumière.

L'effet Doppler (il se rapporte non seulement aux ondes lumineuses mais aussi aux ondes acoustiques) consiste en ce que lors du mouvement relatif de l'observateur (récepteur) et de la source la pulsation (de la lumière ou du son) mesurée par l'observateur diffère de celle relevée dans le repère où la source est immobile.

Soit la source immobile dans le référentiel inertial K'. C'est le cas de la pulsation propre de la source lumineuse ω_0 ($\omega_0 = \omega'$). En déterminant ω dans le repère K, on s'intéresse à l'angle que fait la direction de la vitesse de la source avec le rayon observé dans K et non dans K'. La formule (11) donne immédiatement

$$\cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta - B}{1 - B\cos\vartheta}$$

et pour l'expression figurant dans (10) on obtient donc

$$1 + B\cos\vartheta' = \frac{1 - B^2}{1 - B\cos\vartheta}. \tag{13}$$

En portant (13) dans (10), on aboutit à l'expression traduisant l'effet Doppler:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 - B\cos\vartheta}. \tag{14}$$

En résumé, l'observateur en K n'enregistrera pas la pulsation propre ω_0 de la source. La pulsation observée ω dépend non seulement de la vitesse de la source $\left(B = \frac{V}{c}\right)$ mais aussi de l'angle ϑ, sous lequel la lumière atteint le récepteur.

Si le rayonnement est reçu dans la direction de la vitesse relative, on a affaire à l'*effet Doppler longitudinal*. Si K' est à droite de K, la source s'éloigne de l'observateur et la lumière chemine dans le sens opposé à celui de l'axe des x. Donc, $\cos\vartheta = \cos\pi = -1$. Alors (14) fournit:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - B}{1 + B}}.$$

L'observateur captant la lumière de la source qui s'éloigne décèle la diminution de la pulsation.

Au contraire, si K' se trouve à gauche de K, i.e. $\cos\vartheta = 1$, et la source s'approche de l'observateur, on a

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + B}{1 - B}}.$$

La pulsation de la lumière interceptée augmente par rapport à sa propre pulsation. On peut récrire les deux dernières formules

aux termes B^2 près:

$$\omega = \omega_0 (1 - B),$$

$$\omega = \omega_0 (1 + B).$$

Les deux formules peuvent être réunies sous la forme:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \equiv \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm B.$$

Ainsi donc, l'effet Doppler longitudinal est l'effet du premier ordre en B. D'après la théorie non relativiste, on ne doit pas déceler l'effet Doppler dans la direction perpendiculaire à la vitesse de la source lumineuse. Or, les formules relativistes que nous venons d'obtenir prévoient dans ce cas la modification de la pulsation $\left(\textit{effet transverse}, \ \vartheta = \pm \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - B^2},$$

et la pulsation est fonction de B^2. En cas des vitesses non relativistes (il est à souligner que ce passage ne conduit pas aux formules non relativistes, car elles tenaient compte du milieu de la propagation de la lumière), le développement du binôme fournit:

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} B^2\right).$$

Ainsi donc, l'effet Doppler transverse est l'effet du deuxième ordre en B et s'observe avec beaucoup plus de difficultés que l'effet longitudinal. On ne s'étonne pas que celui-là ne fut découvert qu'en 1938 (Ives) et totalement confirma la formule relativiste.

Les formules (11) et (12) coïncident avec les formules (III, 19) déduites directement des formules de transformation des vitesses; elles décrivent donc complètement le phénomène d'aberration (voir 19).

En conclusion, déduisons la formule, qui nous sera bien utile ultérieurement, de transformation de l'angle solide élémentaire en coordonnées sphériques. Choisissons l'axe polaire dans le sens du mouvement relatif de deux systèmes (axe des x, x'). Dans le repère K', l'élément de l'angle solide $d\Omega'$ s'écrira sous la forme $d\Omega' = \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi' = -d(\cos\vartheta') d\varphi'$. Comme les coordonnées y et z demeurent les mêmes, il en est de même de la coordonnée φ (projection sur le plan perpendiculaire à la direction du mouvement): $\varphi = \varphi'$ et $d\varphi = d\varphi'$. La formule qui précède (13) donne

$$d(\cos\vartheta') = -\frac{1 - B^2}{(1 - B\cos\vartheta)^2} \sin\vartheta \, d\vartheta,$$

d'où la formule recherchée de la transformation

$$d\Omega' = \frac{1}{\Gamma^2 (1 - B\cos\vartheta)^2} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{d\Omega}{\Gamma^2 (1 - B\cos\vartheta)^2}, \qquad (15)$$

car l'élément de l'angle solide $d\Omega$ dans K est égal à

$$d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

49. Transformation de l'onde plane. Commençons par le calcul des composantes du tenseur énergie-impulsion-élasticité pour une onde plane. L'axe des x' suit la direction de la propagation de l'onde, l'axe des y' le vecteur $\boldsymbol{E}'$, l'axe des z' le vecteur $\boldsymbol{B}'$. Pour un tel choix des axes, on a

$$E'_x = D'_x = B'_x = H'_x = E'_z = D'_z = H_y = B_y = 0. \tag{16}$$

Selon (V, 149), le tenseur T'_{ik} a la forme simple:

$$T'_{ik} = \begin{pmatrix} -w' & 0 & 0 & -iw' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -iw' & 0 & 0 & w' \end{pmatrix}. \tag{17}$$

On a besoin des composantes du tenseur T'_{ik} dans le cas où l'onde plane se propage dans le plan (x', y') sous l'angle ϑ' par rapport à l'axe des x'. Cette transformation s'effectue à l'aide d'une simple rotation du système de coordonnées; la matrice de cette transformation des coordonnées prend la forme simple:

$$\tilde{\alpha}_{ik} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta' & -\sin\vartheta' & 0 & 0 \\ \sin\vartheta' & \cos\vartheta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

En transformant les composantes du tenseur (17) suivant les formules générales de transformation des tenseurs à l'aide de la matrice (18), on arrive au tenseur $\tilde{T}'_{ik}$:

$$\tilde{T}'_{ik} = \begin{pmatrix} -w'\cos^2\vartheta' & -w'\sin\vartheta'\cos\vartheta' & 0 & -iw'\cos\vartheta' \\ -w'\sin\vartheta'\cos\vartheta' & -w'\sin^2\vartheta' & 0 & -iw'\sin\vartheta' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -iw'\cos\vartheta' & -iw'\sin\vartheta' & 0 & w' \end{pmatrix}. \tag{19}$$

D'où, en particulier,

$$\tilde{w}' = w', \quad \tilde{S}'_x = cw'\cos\vartheta', \quad \tilde{T}'_{11} = -w'\cos^2\vartheta' \tag{20}$$

Démontrons le théorème: une onde plane délimitée dans l'espace (appelée parfois « train d'ondes ») possède l'impulsion et l'énergie formant un quadrivecteur, analogue à celui d'énergie-impulsion d'une particule matérielle (ce théorème est le cas particulier du

théorème plus général *)). Pour la démonstration il faut savoir la formule définissant la variation du volume occupé par le train d'ondes lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre. La difficulté en est que le train d'ondes prend la vitesse de la lumière c, ce qui signifie que son volume n'est plus calculable dans son propre repère (il est impossible d'introduire un référentiel possédant la vitesse de la lumière). On parvient tout de même à dépasser l'obstacle en évitant d'introduire le volume propre et à effectuer le passage à la limite lorsque la vitesse tend vers celle de la lumière.

Admettons que dans le système K' un certain volume se meuve tout entier avec la vitesse v'; dans son propre référentiel, il est égal à $\mathfrak{V}_0$. Alors, selon (III, 2)

$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}_0 \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}. \tag{21}$$

Le même volume considéré dans K acquiert une vitesse v qui se détermine dans ce repère par la formule (III, 17). Par conséquent, la valeur du volume dans K (désignons-la par $\mathfrak{V}$) vaut

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \mathfrak{V}_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'}{c} \mathrm{B} \cos \vartheta'} = \mathfrak{V}' \frac{\sqrt{1 - \mathrm{B}^2}}{1 + \frac{v'}{c} \mathrm{B} \cos \vartheta'};$$

la seconde égalité découle de la formule (III, 17). Ici, v' est la vitesse du mouvement du volume dans K'. Maintenant passons à la limite $v' \to c$. La formule recherchée sera

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}' \frac{\sqrt{1 - \mathrm{B}^2}}{1 + \mathrm{B} \cos \vartheta'}. \tag{22}$$

Ainsi donc, si dans K' un volume est égal à $\mathfrak{V}'$, dans le système K se déplaçant avec la vitesse V par rapport à K', il est défini selon (22). Il va de soi que pour les différentielles des volumes on a la relation analogue

$$d\mathfrak{V} = d\mathfrak{V}' \frac{\sqrt{1 - \mathrm{B}^2}}{1 + \mathrm{B} \cos \vartheta'} = \frac{1}{\Gamma (1 + \mathrm{B} \cos \vartheta')} d\mathfrak{V}'. \tag{23}$$

Reprenons la démonstration du théorème. En appliquant les formules générales de transformation d'un tenseur (Appendice, 31) au

*) Le théorème général est exposé dans les ouvrages: Becker R., *Theorie der Electrizitat*, Band II, Elektronentheorie, 6, vollständig neubearbeitete Auflage des Werkes von M. Abraham. Leipzig und Berlin Verlag und Druck von B. G. Teubner, 1933. Formulons ce théorème général: dans la région de l'espace où le tenseur T_{ik} satisfait à la condition $\frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik} = 0$ et $T_{ik} = 0$ aux frontières de cette région, les composantes T_{4k} sont les composantes d'un quadrivecteur.

tenseur (17), nous déduisons les composantes de la quatrième ligne de la matrice T_{ik} sous la forme suivante:

$$\left.\begin{array}{l} T_{41} = -i\Gamma^2 w'(1+B)^2, \quad T_{42}=0, \\ T_{43}=0, \quad T_{44}=\Gamma^2 w'(1+B)^2, \end{array}\right\} \tag{24}$$

et pour le tenseur (19) les composantes suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} T_{41} = -i\Gamma^2 w'(B+\cos\vartheta')(1+B\cos\vartheta'), \\ T_{42} = -i\Gamma w'\sin\vartheta'(1+B\cos\vartheta'), \\ T_{43}=0, \\ T_{44}=\Gamma^2 w'(1+B\cos\vartheta')^2. \end{array}\right\} \tag{25}$$

Il est évident que pour $\vartheta' = 0$ on passe des formules (25) à (24). Démontrons maintenant que les composantes (25), et par conséquent (24) dans le cas particulier, multipliées par le volume ou l'élément de volume, se transforment dans un référentiel choisi comme les vecteurs. En voici l'exemple:

$$\left.\begin{array}{l} T_{41}\,d\mathfrak{V} = \Gamma(-iw'\cos\vartheta' - iBw')\,d\mathfrak{V}' = \Gamma(T'_{41}\,d\mathfrak{V}' - iBT'_{44}\,d\mathfrak{V}'), \\ T_{42}\,d\mathfrak{V} = T'_{42}\,d\mathfrak{V}', \quad T_{43}\,d\mathfrak{V} = T'_{43}\,d\mathfrak{V}' = 0, \\ T_{44}\,d\mathfrak{V} = \Gamma(w' + Bw'\cos\vartheta)\,d\mathfrak{V}' = \Gamma(T'_{44}\,d\mathfrak{V}' + iBT'_{41}\,d\mathfrak{V}'). \end{array}\right\} \tag{26}$$

En comparant les formules obtenues (26) avec celles de transformation des vecteurs, nous sommes amenés à la conclusion que les quantités T_{41}, T_{42}, T_{43}, T_{44}, i.e. les composantes de la quatrième ligne du tenseur (17) ou (19), multipliées par l'élément de volume correspondant, forment un quadrivecteur.

Il va de soi que ce résultat demeure le même après l'intégration par rapport au volume ou la multiplication par le volume total à condition que les composantes du tenseur T_{ik} soient indépendantes des coordonnées, comme c'est le cas des ondes planes.

Déterminons l'énergie totale du train d'ondes dans le repère K' [voir (19)]:

$$U' = \int \widetilde{T}'_{44}\,d\mathfrak{V}' = \int w'\,d\mathfrak{V}'. \tag{27}$$

Les composantes de l'impulsion résultante du train d'ondes sont fixées par les formules:

$$\left.\begin{array}{l} G'_x = \frac{i}{c}\int \widetilde{T}'_{14}\,d\mathfrak{V}' = \frac{i}{c}\int(-iw'\cos\vartheta')\,d\mathfrak{V}' = \frac{U'}{c}\cos\vartheta', \\ G'_y = \frac{i}{c}\int \widetilde{T}'_{24}\,d\mathfrak{V}' = \frac{U}{c}\sin\vartheta', \quad G'_z = 0. \end{array}\right\} \tag{28}$$

On peut effectuer le calcul analogue pour le repère K, les formules (25) conduisant directement à la formule de transformation de l'é-

nergie totale:

$$U = \int T_{44}\, d\mathfrak{V} = \Gamma^2 (1 + \mathrm{B} \cos\vartheta')^2 \int \frac{w'\, d\mathfrak{V}'}{\Gamma (1 + \mathrm{B} \cos\vartheta')} =$$
$$= \Gamma (1 + \mathrm{B} \cos\vartheta') U'. \qquad (29)$$

Calculons également les composantes de l'impulsion résultante:

$$G_x = \frac{i}{c} \int T_{14}\, d\mathfrak{V} = \frac{i}{c} (-i\Gamma)(\mathrm{B} + \cos\vartheta') \int w'\, d\mathfrak{V}' =$$
$$= \frac{1}{c} \Gamma (\mathrm{B} + \cos\vartheta') U' = \frac{U}{c} \cos\vartheta, \qquad (30)$$

où l'on a utilisé (11) dans la dernière expression; de (12) il vient de façon analogue

$$G_y = \frac{i}{c} \int T_{24}\, d\mathfrak{V} = \frac{1}{c} U' \sin\vartheta' = \frac{1}{c} \Gamma (1 + \mathrm{B} \cos\vartheta') U' \sin\vartheta = \frac{U}{c} \sin\vartheta.$$

Ainsi, dans tout référentiel d'inertie on peut introduire le quadrivecteur

$$\vec{P}' \left(\frac{U}{c} \cos\vartheta', \frac{U'}{c} \sin\vartheta', 0, i\frac{U'}{c} \right), \qquad (31)$$

$\vec{P}'^2$ étant égal à zéro dans tous les systèmes de référence.

De la condition $\vec{P}'^2 = 0$ découle que l'onde lumineuse dans le vide n'est au repos en aucun référentiel d'inertie. La comparaison des composantes de $\vec{P}'$ (31) avec celles de $\vec{k}'$ (8) conduit à l'identité des formules de transformation de U' et ω'. Cela veut dire que le rapport $\frac{U'}{\omega'}$ est invariant. Il s'ensuit que l'énergie d'un même train d'ondes, mesurée par les observateurs différents, est différente. Le rapport des énergies est égal à celui des pulsations des trains d'ondes correspondants, mesurées par les mêmes observateurs.

Les formules obtenues permettent d'établir la loi de transformation des amplitudes des ondes planes. En effet, de (25) on a pour la transformation de la densité d'énergie

$$w = w' \Gamma^2 (1 + \mathrm{B} \cos\vartheta')^2.$$

En comparant cette expression avec la formule de transformation de la pulsation (10)

$$\omega = \omega' \Gamma (1 + \mathrm{B} \cos\vartheta')$$

nous nous apercevons que la densité d'énergie se transforme comme le carré de la pulsation. Etant donné que la densité d'énergie est une fonction quadratique des amplitudes du champ de l'onde plane, il en découle que ces dernières se transforment d'après la même loi que la pulsation.

En guise d'illustration de l'application de la conception de l'onde électromagnétique considérée comme un système et dont l'impulsion et l'énergie forment un quadrivecteur, envisageons la transformation de la distribution angulaire du rayonnement du dipôle oscillant lors du passage du repère K' du centre d'inertie à n'importe quel autre repère. Il est connu que dans le repère du centre d'inertie du dipôle, où l'axe polaire suit celui du dipôle, l'intensité de rayonnement dI' dans la direction (ϑ', φ') est égale à $dI'(\vartheta', \varphi') = \text{const}\cdot\sin^2\vartheta'\, d\Omega'$. Mais l'intensité de rayonnement $dI = \frac{d\varepsilon}{dt}$, autrement dit, l'énergie émise dans la direction donnée en une unité de temps est une quantité relative. Sa loi de transformation est facile à déduire; pour l'émission on a $d\varepsilon = c\,dP$, où dP est une portion d'impulsion emportée par le rayonnement dans la direction donnée, et $d\varepsilon' = c\,dP'$. Selon la transformation de Lorentz:

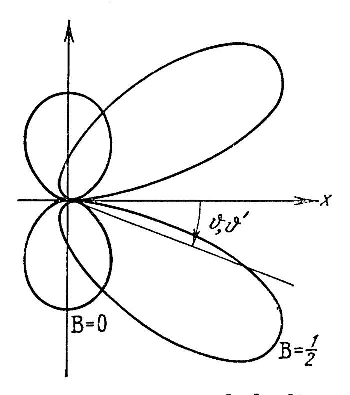


Fig. 22. Variation de la distribution angulaire de l'intensité de rayonnement d'un dipôle oscillant lors du passage d'un repère K' où il est immobile $(B = 0)$ au repère K où il est en mouvement $\left(B = \frac{1}{2}\right)$. On voit le maximum d'intensité dévier du côté du mouvement du dipôle. L'axe de ce dernier est dirigé dans le sens de son mouvement.

$$d\varepsilon' = \Gamma\,(d\varepsilon - \boldsymbol{V}\,d\boldsymbol{P}) = \Gamma\,(d\varepsilon - V\,dP\cos\vartheta) = \Gamma\,d\varepsilon\,(1 - B\cos\vartheta),$$

$$dt' = \frac{1}{\Gamma}\,dt \quad (dt' \text{ est le temps propre}).$$

En divisant terme à terme l'égalité supérieure par celle inférieure, nous avons:

$$dI = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon'}{dt'}\,\frac{1}{\Gamma^2(1 - B\cos\vartheta)} = \frac{dI'}{\Gamma^2(1 - B\cos\vartheta)}\,.$$

Nous déduisons immédiatement le résultat recherché:

$$dI = \text{const}\,\frac{\sin^2\vartheta'\,d\Omega'}{\Gamma^2(1 - B\cos\vartheta)} = \text{const}\,\frac{\sin^2\vartheta'\,d\Omega}{\Gamma^4(1 - B\cos\vartheta)^3} = \text{const}\,\frac{\left(1 - \frac{V}{c^2}\right)^3\sin^2\vartheta}{\left(1 - \frac{V}{c}\cos\vartheta\right)^5}\,d\Omega,$$

où nous avons utilisé les formules (15) et (12'). Il vient de l'expression obtenue que la distribution angulaire de l'intensité du dipôle mobile dans K diffère de celle de K' surtout quand $V \approx c$. L'intensité maximale tombe alors sur une certaine direction faisant un angle aigu avec l'axe du dipôle (fig. 22).

50. Pression de l'onde électromagnétique sur la surface d'un corps. La pression, c.-à-d. la force répartie sur une unité de surface, est définie par le flux d'impulsion à travers la surface unitaire. Ce flux s'exprime à son tour au moyen des composantes spatiales du tenseur énergie-impulsion-élasticité $T_{\alpha\beta}$ qui, écrit pour l'onde plane, a la forme (17) ou (19) en fonction de la direction de sa propagation. Si l'onde se propage suivant l'axe des x', alors, d'après (17), le tenseur élastique n'a qu'une seule composante non nulle

$T'_{xx} = -w'$. Afin de trouver le flux d'impulsion à travers l'élément de surface donné, il faut définir la normale à cette surface $\boldsymbol{n}(n_\alpha)$. Conformément à (V, 155), le flux d'impulsion traversant l'élément dS défini par $\boldsymbol{n}$ est égal à (fig. 23):

$$T'_{\alpha\beta} n'_\alpha m'_\beta \, dS' = T'_{11} n'_1 m'_1 \, dS',$$

car, de toute la somme double, on n'a qu'un seul terme non nul. La valeur de la pression exercée sur la surface perpendiculaire à l'axe des x' est égale à $p' = T'_{11} = T'_{xx} = |w'|$. Si la vitesse de l'impulsion lumineuse est égale à c, l'énergie interceptée par une unité de surface en une unité de temps vaut $w'c = \mathscr{E}'$. Mais $w' = p'$, d'où:

$$p' = \frac{\mathscr{E}'}{c}. \quad (32)$$

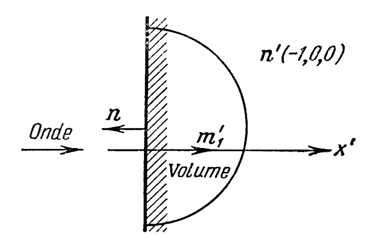


Fig. 23. Calcul de la pression exercée par une onde électromagnétique sur la surface d'un corps.

Par conséquent, la pression lumineuse est égale au quotient de l'énergie de l'onde électromagnétique, traversant en une unité de temps une unité de surface, par c. On verra par la suite que la relation (32) est aussi valable pour la lumière considérée comme un flux de particules relativistes ou photons.

Déterminons maintenant la force qu'applique à la paroi une onde lumineuse tombant sur cette dernière sous un angle quelconque pour se réfléchir ensuite. Soient ϑ l'angle d'incidence, $\boldsymbol{n}$ la normale à la paroi, $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{s}'$ les vecteurs unitaires dirigés suivant le mouvement des ondes incidente et réfléchie respectivement. Le flux d'impulsion à travers l'unité de la surface n'est autre que la pression $\boldsymbol{p}$ qui a pour composantes:

$$p_\beta = T_{\alpha\beta} n_\alpha + T^*_{\alpha\beta} n_\alpha = (T_{\alpha\beta} + T^*_{\alpha\beta}) n_\alpha,$$

où $T_{\alpha\beta}$ et $T^*_{\alpha\beta}$ sont les composantes des tenseurs élastiques des ondes incidente et réfléchie.

Les composantes $T_{\alpha\beta}$ pour l'onde faisant l'angle ϑ avec l'axe des x sont données par (19). Le vecteur d'onde tridimensionnel du rayon réfléchi s'obtient de celui du rayon incident en remplaçant ϑ par $-\vartheta$. Introduisons encore le facteur de réflexion R de sorte que $w^* = Rw$. Compte tenu de ce que $T_{11} = T'_{11} \cos^2 \vartheta = -w \cos^2 \vartheta$ et $T_{12} = T'_{11} \sin \vartheta \cos \vartheta = -w \sin \vartheta \cos \vartheta$, il vient pour la force normale (pression lumineuse):

$$p_x = (w + Rw) \cos^2 \vartheta = w(1 + R) \cos^2 \vartheta$$

et pour la force tangentielle:

$$p_y = w(1 - R) \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Analysons les valeurs de la pression normale p_x dans deux cas les plus intéressants. Pour l'incidence normale ($\vartheta = 0$) et la réflexion totale, la pression est égale à $2w$; pour l'absorption totale on a $p = w$. S'il s'agit du rayonnement isotrope, il faut prendre la valeur moyenne de p_x dans toutes les directions, i.e. prendre la moyenne de $\cos^2 \vartheta$. Mais la moyenne du carré du cosinus directeur du vecteur unitaire isotrope est égale à 1/3. Ainsi, dans le cas où l'absorption d'un rayonnement isotrope est totale, la pression a pour expression $p = \frac{w}{3}$.

Les opérations élémentaires conduisent également à toutes ces formules. En partant de la densité d'impulsion d'un champ électromagnétique $g = \frac{S}{c^2}$ et de l'expression du vecteur de Poynting-Oumov pour l'onde plane $S = wc$ (w est la densité d'énergie), on obtient $g = \frac{w}{c}$. L'onde plane d'incidence ϑ apporte à la paroi en une unité de temps toute l'énergie et toute l'impulsion contenues dans un cylindre oblique dont la base est égale à la surface unitaire de la paroi et la génératrice à la vitesse de la lumière. Le volume de ce cylindre vaut $c \cos \vartheta$. Il s'ensuit que l'énergie reçue en une seconde par 1 cm² de la paroi est égale à $\mathscr{E} = wc \cos \vartheta$ et l'impulsion G_x, transmise en une seconde normalement à la paroi, à $G_x = g \cos \vartheta \times c \cos \vartheta = w \cos^2 \vartheta$. Or, l'impulsion appliquée à l'unité de surface par unité de temps est précisément la pression p. En tenant compte de la réflexion et de l'absorption de la lumière, on a comme auparavant

$$p = w (1 + R) \cos^2 \vartheta.$$

51. Variation de la pulsation de la lumière lors de la réflexion sur un miroir mobile. Admettons que dans le repère K le rayon lumineux se propage sous l'angle ϑ_0 par rapport à l'axe des x dans le plan (x, y). Le miroir disposé parallèlement à l'axe des y se déplace avec la vitesse V par rapport à K. Après avoir atteint le miroir, le rayon est réfléchi. Trouvons la pulsation et la direction du rayon réfléchi percepté par l'observateur dans K.

Il est commode d'introduire le référentiel K' lié au miroir. Alors, le problème se résout de la façon suivante. On donne dans le référentiel K le quadrivecteur du rayon lumineux, i.e. la pulsation de la lumière et sa direction de propagation. Ces dernières sont aisément définies pour K' selon les formules de la transformation de Lorentz. Or, le système K', où le miroir est immobile, est régi par la loi de réflexion classique : l'angle d'incidence est égal à celui de réflexion. Ceci signifie que le quadrivecteur de la lumière réfléchie ne diffère de celui de la lumière incidente que par le signe de la première composante du quadrivecteur, i.e. de la composante suivant l'axe des x. Pour trouver le quadrivecteur du rayon ré-

fléchi dans K, on a recours de nouveau à la transformation de Lorentz.

Ainsi, admettons que le rayon de pulsation ω_0 se propage dans K sous un angle ϑ_0 par rapport à l'axe des x [il chemine dans le plan (x, y)]. Le quadrivecteur $\vec{k}_0$ du même rayon dans le repère K aura pour composantes:

$$\left.\begin{array}{ll} k_1^0 = k^0 \cos\vartheta_0 \equiv \frac{\omega_0}{c}\cos\vartheta_0, & k_3^0 = 0, \\ k_2^0 = k^0 \sin\vartheta_0 \equiv \frac{\omega_0}{c}\sin\vartheta_0, & k_4^0 = i\,\frac{\omega_0}{c} = ik_0. \end{array}\right\} \qquad (33)$$

Recherchons le quadrivecteur du même rayon dans le référentiel K' en le désignant par $\vec{k}'$; selon la transformation de Lorentz

$$k_1' = \Gamma(k_1^0 + iBk_4^0), \quad k_2' = k_2^0, \quad k_3' = k_3^0, \quad k_4' = \Gamma(k_4^0 - iBk_1^0). \qquad (34)$$

Après la réflexion sur le miroir qui est au repos dans K', la composante k_1' change de signe; le quadrivecteur du rayon réfléchi $\vec{k}''$ s'écrira alors sous la forme

$$k_1'' = -\Gamma(k_1^0 + iBk_4^0), \quad k_2'' = k_2^0, \quad k_3'' = k_3^0, \quad k_4'' = \Gamma(k_4^0 - iBk_1^0). \qquad (35)$$

Dans K, le rayon réfléchi est défini par le quadrivecteur $\vec{k}$ qui s'obtient par la transformation inverse de Lorentz (de K'' à K) du quadrivecteur $\vec{k}''$:

$$k_1 = \Gamma(k_1'' - iBk_4'') = -\Gamma^2\{(1 + B^2)\,k_1^0 + 2iBk_4^0\}, \qquad (36)$$

$$k_2 = k_2^0, \quad k_3 = k_3^0, \qquad (37)$$

$$k_4 = \Gamma(k_4'' + iBk_1'') = \Gamma^2\{(1 + B^2)\,k_4^0 - 2iBk_1^0\}. \qquad (38)$$

Il vient de (37) que $k_3 = k_3^0 = 0$; cela signifie qu'une fois réfléchie la lumière reste toujours dans le plan (x, y). Portons dans les premiers membres des formules (36), (37), (38) les valeurs des composantes $\vec{k}$ (l'angle ϑ est toujours considéré comme l'angle d'inclinaison du rayon vers l'axe des x):

$$k_1 = \frac{\omega}{c}\cos\vartheta, \quad k_2 = \frac{\omega}{c}\sin\vartheta, \quad k_3 = 0, \quad k_4 = i\,\frac{\omega}{c}, \qquad (39)$$

et dans les deuxièmes membres les expressions (33). De (38) il découle que

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{(1+B^2) - 2B\cos\vartheta_0}{1 - B^2}. \qquad (40)$$

De (36):

$$\cos\vartheta = -\frac{\omega}{\omega_0}\,\frac{(1+B^2)\cos\vartheta_0 - 2B}{1 - B^2} = -\frac{(1+B^2)\cos\vartheta_0 - 2B}{(1+B^2) - 2B\cos\vartheta_0}, \qquad (41)$$

où on a utilisé la relation (40). De façon analogue on obtient de (37):

$$\sin\vartheta = \frac{\omega_0}{\omega}\sin\vartheta_0 = \frac{\sin\vartheta_0\,(1-B^2)}{(1+B^2)-2B\cos\vartheta_0}\,. \tag{42}$$

Ecrivons les formules pour le cas de l'incidence normale de la lumière sur le miroir. Supposons que dans le repère K l'angle d'incidence soit égal à $\vartheta_0 = 0$. Alors, on obtient:

$$\omega = \omega_0\frac{1-B}{1+B}\,, \quad \cos\vartheta = -1, \quad \sin\vartheta = 0. \tag{43}$$

Ces dernières relations font voir qu'après la réflexion la lumière se propage toujours suivant la normale au miroir, mais en sens inverse à celui initial. Le repère K', où le miroir est au repos, se mouvait dans le même sens que la lumière. La pulsation de la lumière diminuait en cas de réflexion.

Si le miroir se meut à la rencontre du rayon, la quantité B change de signe et nous avons:

$$\omega = \omega_0\frac{1+B}{1-B}\,, \quad \cos\vartheta = -1, \quad \sin\vartheta = 0. \tag{44}$$

La pulsation de la lumière s'accroît en cas de réflexion.

En conclusion écrivons les formules (40), (41) et (42) à l'approximation non relativiste, c.-à-d. dans le cas où la vitesse du miroir n'est pas grande: $B = \frac{V}{c} \ll 1$; en négligeant tous les termes en B^2, on obtient respectivement

$$\omega = \omega_0(1-2B\cos\vartheta_0), \tag{45}$$

$$\cos\vartheta = -\cos\vartheta_0 + 2B\sin^2\vartheta_0, \tag{46}$$

$$\sin\vartheta = \sin\vartheta_0 + 2B\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0. \tag{47}$$

Si le rayon tombe normalement au miroir ($\vartheta_0 = 0$), il est réfléchi dans le sens contraire à celui initial et la pulsation varie selon la loi

$$\omega = \omega_0\left(1-2\frac{V}{c}\right), \tag{48}$$

à condition que le miroir se déplace dans le même sens que le rayon. Si le miroir se meut à la rencontre de la lumière, on obtient:

$$\omega = \omega_0\left(1+2\frac{V}{c}\right). \tag{49}$$

52. Quanta de lumière (photons) comme particules relativistes. Il a été montré que l'énergie et l'impulsion d'une particule relativiste de masse au repos m_0 étaient fixées par les formules (IV, 27) et (IV, 23):

$$\mathscr{E} = m_0c^2\gamma, \qquad p = m_0\gamma v. \tag{50}$$

Si une particule possède une masse au repos, on peut trouver un système de référence où elle sera immobile. Dans ce système la masse de la particule sera égale à m_0 et son énergie à $\mathscr{E}_0 = m_0c^2$. La mécanique relativiste relie l'énergie et l'impulsion d'une particule par la formule (IV, 40):

$$\mathscr{E} = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}. \tag{51}$$

Si, pour $v \to c$, le facteur γ, entrant dans les expressions (50), croît indéfiniment, l'énergie et l'impulsion deviennent infiniment grandes. Toutefois, la masse au repos m_0 de la particule est finie, i.e. $m_0 \neq 0$. On en conclut de nouveau qu'une particule dont la masse au repos est finie ne peut se déplacer à la vitesse de la lumière.

De la relation (IV, 41) il vient que les particules qui se déplacent à la vitesse c sont caractérisées par l'expression $p = \frac{\mathscr{E}}{c}$. Mais alors il vient de (IV, 40) que pour ces particules $m_0 = 0$.

En mécanique classique pour $m_0 = 0$ nous obtenons $\mathscr{E} = \frac{m_0v^2}{2} = 0$ et $\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{v} = 0$. Or, une particule sans masse, ne possédant ni l'énergie, ni l'impulsion, n'existe tout simplement pas. La Relativité admet l'existence des particules dont la masse au repos est nulle. L'expression (51) conduit, elle aussi, pour $m_0 = 0$ à cette même relation entre l'énergie et l'impulsion d'une particule relativiste:

$$p = \frac{\mathscr{E}}{c}. \tag{52}$$

Formulons ce que nous venons d'obtenir. Les expressions (50) de l'énergie et de l'impulsion ne contredisent pas l'existence des particules se déplaçant à la vitesse de la lumière mais seulement dans le cas où la masse au repos de ces particules est nulle. La mécanique relativiste ne nous renseigne pas davantage sur ces particules.

Est-ce qu'on rencontre dans la nature les mouvements se produisant avec la vitesse de la lumière? Il est évident que la phase d'une onde lumineuse, ou en général la phase d'une onde électromagnétique, se déplace avec la vitesse de la lumière. Bien plus, pour la lumière, comme on le voit de (32), est juste la relation relativiste entre l'impulsion et l'énergie (52). Néanmoins, d'après la physique moderne, lors de l'émission ou de l'absorption ou pendant l'interaction avec la substance, la lumière se comporte comme un ensemble de particules dont chacune possède l'énergie $\hbar\omega$ et l'impulsion $\frac{\hbar\omega}{c}$ (où $\hbar$ est la constante de Planck, $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ erg·s, et ω la pulsation de la lumière). Chaque interaction élémentaire avec la substance prévoit la participation d'une seule particule appelée par Einstein *quantum de lumière*. Chaque interaction vérifie les principes de la conservation de l'énergie et de l'impulsion.

La vitesse des particules lumineuses peut être égale à celle de la lumière (dans le vide). On peut donc interpréter les quanta de lumière en tant que particules relativistes dont la masse au repos est nulle *). Actuellement, on les nomme plus souvent *photons*. Soulignons que pour le moment nous envisageons les quanta de lumière dans le vide (voir 53).

La lumière est un ensemble de photons, telle est la conception moderne universellement adoptée qui puise ses origines dans l'électrodynamique quantique.

Donc, la masse au repos du photon est nulle. Cette circonstance paraît ennuyeuse au premier coup d'œil. On s'est habitué que dans la nature tous les corps et toutes les particules possèdent une masse finie. Cette habitude de faire de la masse une sorte de repère universel a ses racines historiques. Il n'y a pas longtemps, on considérait la masse comme une propriété organique de la matière, conçue, dans le sens général philosophique, comme une réalité objective. Les physiciens soutenaient ce point de vue en considérant la masse (la masse au repos, évidemment) comme le facteur définissant l'individualité de chaque corps ou particule. Il en était ainsi dans la Mécanique classique. Ce qui possédait la masse pourrait être suivi dans le temps, au moins hypothétiquement. La lumière présentait un mystère pour la physique prérelativiste. Jusqu'au début du XXe siècle, même les physiciens doutèrent de la matérialité de la lumière. L'expérience brillante de P. Lébédev, faite en 1901, mit fin à tous les doutes en découvrant la pression de la lumière. La pression est liée au flux d'impulsion; on sait déjà que la lumière transporte de l'énergie. Il en découle que la lumière est matérielle comme possédant l'énergie et l'impulsion. Cependant, la particule lumineuse est dépourvue de masse au repos, tout comme l'impulsion lumineuse. C'est fâcheux mais c'est ainsi et on n'y peut rien. En même temps, ce n'est pas un fait répréhensible. Dans la nature, il existe des objets ayant la masse au repos et d'autres qui n'en ont pas. Ces derniers se déplacent avec la vitesse de la lumière dans tous les systèmes de référence et il est impossible de les arrêter. Arrêtés, ils cessent d'exister et se transforment en d'autres formes de la matière. Le fait que les formes de la matière de masse au repos nulle se transforment en celles qui possèdent une masse au repos non nulle (et inversement) témoigne de l'équivalence de ces formes.

---

*) Si la masse du photon n'était pas nulle, cela ne contredirait pas la Relativité restreinte, mais dans ce cas la vitesse c de la transformation de Lorentz ne serait pas celle de la lumière dans le vide (on sous-entend que c'est la vitesse des photons) mais la vitesse limite du mouvement des corps macroscopiques. C'est pourquoi le problème de la masse du photon ne se résout qu'expérimentalement (voir les détails dans l'article de I. Kobzarev et L. Okoun, *Masse du photon*, UPN 95, 131, 1968). Dans cet ouvrage, la masse du photon est supposée nulle.

On introduit souvent la « masse » du photon par l'expression relativiste :

$$m_{\text{ph}} = \frac{\mathscr{E}}{c^2}. \qquad (53)$$

où $\mathscr{E} = \hbar\omega$. A-t-on le droit de le faire? Oui, évidemment, mais cela ne donne aucun avantage. On dit parfois qu'en introduisant la masse du photon (53) on vérifie le principe de la conservation de la masse pour le cas de l'émission de la lumière. Mais ce principe est automatiquement vérifié avec le principe de la conservation de l'énergie, et il n'est d'aucune utilité d'en prendre un soin particulier. Quand on calcule la répartition des photons d'après leurs énergies en aboutissant à la formule de Planck, on part de l'identité de tous les photons. Or, selon (53), la masse du photon « rouge » est inférieure à celle du photon « bleu ». Même dans ce cas, la masse (53) n'est d'aucun secours. L'essentiel est que tous les photons sont dépourvus de masses au repos. L'inertie du photon n'est non plus décrite par (53), puisque, dans le vide, il se meut dans tous les référentiels avec la même vitesse supposée égale à c. On ne peut ni l'accèlérer, ni retarder dans le vide. Il en est de même des propriétés gravifiques du photon. La déviation du rayon lumineux par le champ gravitationnel se calcule sans avoir recours à la masse (53). On reprendra ce problème au chapitre IX, paragraphe 57, mais, en résumant, répétons qu'on n'a pas besoin d'introduire la masse du photon (53) car elle apporte une confusion inutile.

Si l'on considère un quantum de lumière (photon) comme une particule relativiste sans masse au repos, sa 4-impulsion a pour expression :

$$\vec{p}\left(\hbar\boldsymbol{k},\, i\frac{\hbar\omega}{c}\right),$$

où $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{s}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ ($\boldsymbol{s}$ étant le vecteur unitaire dirigé suivant le rayon). En simplifiant par le facteur commun $\hbar$ (constante de Planck) de toutes les composantes de $\vec{P}$ nous revenons au même quadrivecteur $\vec{k}$ obtenu pour le vecteur d'onde mais appartenant ici à un seul photon :

$$\vec{k}(\boldsymbol{k},\, ik), \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad \vec{P} = \hbar\vec{k}.$$

Le carré du quadrivecteur énergie-impulsion d'un photon est nul :

$$\vec{P}^2 = \hbar^2 k^2 - \hbar^2\frac{\omega^2}{c^2} = 0. \qquad (54)$$

Selon la relation relativiste générale (IV, 29)

$$\vec{P}^2 = -m_0^2 c^2.$$

Donc, (54) montre une fois de plus que pour un photon dans le vide on a $m_0 = 0$. La 4-impulsion du photon coïncidant (à $\hbar$ près) avec le vecteur d'onde quadridimensionnel, introduit à la page 211, tous les résultats valables pour l'onde sont littéralement répétés pour le photon. Il s'agit ici des formules décrivant l'effet Doppler, l'aberration de la lumière, la variation de la fréquence de la lumière réfléchie par un miroir mobile. La théorie des photons conduit aisément à la formule de la pression lumineuse (p. 220). En effet, soit un photon incident sous l'angle ϑ sur la surface d'un corps. La composante normale de son impulsion est égale à $\frac{\hbar\omega \cos\vartheta}{c}$ (fig. 24). Lors de l'absorption du photon, la paroi reçoit cette impulsion suivant la normale. Si le photon se réfléchit, la valeur de l'impulsion transmise dépend du coefficient de réflexion R (il vaut mieux dire : de la probabilité de la réflexion du photon). Il en découle que l'impulsion transmise normalement à la paroi lors de la réflexion du photon est égale à $(1+R)\frac{\hbar\omega}{c}\cos\vartheta$ où $R \leqslant 1$. Soit n le nombre de photons dans 1 cm³.

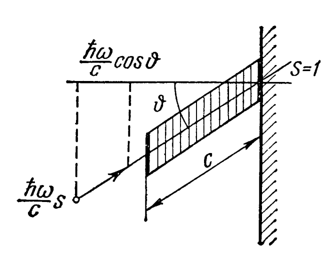


Fig. 24. Calcul de la pression lumineuse basé sur la notion de photon. L'aire de la base du cylindre oblique est égale à $S = 1$.

En une seconde, 1 cm² de la paroi reçoit tous les photons contenus dans un cylindre oblique de génératrice c. Son volume est égal à $c\cos\vartheta$ si l'aire de la base est de 1 cm². Donc, sur 1 cm² de paroi en une seconde tombent $nc\cos\vartheta$ photons qui transmettent à la paroi l'énergie $\hbar\omega nc\cos\vartheta$ (s'ils sont tous absorbés) et l'impulsion

$$nc\cos\vartheta\,(1+R)\frac{\hbar\omega}{c}\cos\vartheta = \hbar\omega n\,(1+R)\cos^2\vartheta.$$

Ce n'est autre que la pression exercée sur la paroi ; ainsi

$$p = w\,(1+R)\cos^2\vartheta, \tag{55}$$

où $w = n\hbar\omega$ est la densité d'énergie dans le faisceau. Il vient donc que les résultats (55) et ceux à la page 219 coïncident.

En conclusion, envisageons la réflexion d'un faisceau lumineux sur un miroir oscillant autour de la position d'équilibre. Le plan du miroir est toujours perpendiculaire au faisceau. Soit $I = N\hbar\omega_0$ l'intensité du faisceau de photons tombant sur le miroir. Si le miroir va à la rencontre des photons, ceux-ci emportent l'énergie

$$\frac{N}{2}\hbar\omega_0\frac{1+B}{1-B}.$$

Si le miroir suit le mouvement des photons, l'énergie emportée est égale à

$$\frac{N}{2}\hbar\omega_0\frac{1-B}{1+B}.$$

Ainsi donc, en une période d'oscillation que nous avons posée égale à 1 s, le flux de photons, réfléchi dans le sens inverse, emporte l'énergie

$$\frac{N}{2}\hbar\omega_0\left(\frac{1+B}{1-B}+\frac{1-B}{1+B}\right)=\frac{N}{2}\hbar\omega_0\frac{2(1+B^2)}{1-B^2}\approx N\hbar\omega_0(1+2B^2).$$

Cela veut dire que dans le faisceau de photons apparaît une énergie supplémentaire:

$$N\hbar\omega_0(1+2B^2)-N\hbar\omega_0=2IB^2=2I\frac{V}{c^2}. \quad (56)$$

Ce supplément d'énergie est dû seulement au travail effectué par le miroir mobile. On trouve la force de frottement créée par le rayonnement. La puissance d'une force de frottement est égale à $F_{fr}V$, et $F_{fr}=\mathcal{K}V$; alors,

$$\mathcal{K}=\frac{2I}{c^2}. \quad (57)$$

53. Propriétés des ondes lumineuses dans un milieu. Si une onde lumineuse (électromagnétique) passe du vide dans un milieu, ses propriétés changent. Du point de vue phénoménologique, on observe la variation de la vitesse de phase de la propagation de l'onde. Si l'indice de réfraction du milieu est égal à n, la vitesse de phase v d'une onde électromagnétique dans le milieu est définie par la formule

$$v=\frac{c}{n}. \quad (58)$$

Etudions les autres caractéristiques d'une onde électromagnétique qui changent quand elle passe du vide dans un milieu. On voit la variation de la densité d'énergie du champ, ce qui découle immédiatement de l'expression de w à la page 175. Que peut-on dire de la densité d'impulsion? Celle-ci, tout comme la densité d'énergie, est une composante du tenseur énergie-impulsion-élasticite dans un milieu. Ce tenseur étant connu dans un référentiel en comouvement, on peut le trouver pans tout autre référentiel. Cependant, il n'existe pas d'une opinion unanime sur ce tenseur; cela est dû à l'ambiguïté de sa définition. Si on fait appel aux raisonnements du paragraphe 41, on sera conduit aux expressions des composantes du tenseur énergie-impulsion dans un milieu, qui ne diffèrent pas d'après leur forme du tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique dans le vide (V, 134). Ainsi, pour le milieu et pour le vide [voir (V, 145)] on a

$$T_{ik}=-\frac{1}{c}F_{im}f_{km}+\delta_{ik}\Lambda. \quad (59)$$

Cependant, les coefficients de proportionnalité entre les composantes spatiales et temporelles de $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{F}$ dans un milieu sont différents [voir (V, 140) et (V, 141)], et le tenseur T_{ik} défini par (59) est, à la différence de (V, 134), antisymétrique. On s'assura aisément que les composantes spatiales du tenseur T_{ik} dans un milieu

ne diffèrent de celles dans le vide que par les *valeurs* de ε et μ. En effet, dans un milieu on a, par exemple:

$$T_{11} = -\frac{1}{c} F_{1m} f_{1m} + \Lambda = -\frac{1}{c}\left\{cB_z \frac{B_z}{\mu} + cB_y \frac{B_y}{\mu} + c\varepsilon E_x^2\right\} +$$

$$+\Lambda = -H_z B_z - B_y H_y - B_x H_x + B_x H_x + E_x D_x + \frac{\boldsymbol{BH} - \boldsymbol{DE}}{2} =$$

$$= B_x H_x + E_x D_x - \frac{\boldsymbol{DE} + \boldsymbol{BH}}{2}.$$

Cette expression coïncide avec T_{11} obtenu à la page 180. De même, nous trouvons que

$$T_{44} = -\frac{1}{c} F_{4m} f_{4m} + \Lambda =$$

$$= \frac{1}{c}\{-cE_x D_x - cE_y D_y - cE_z D_z\} + \Lambda = \frac{\boldsymbol{DE} + \boldsymbol{HB}}{2} = w.$$

Toutefois, si

$$T_{14} = -ic\varepsilon\mu\,(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})_x = -\frac{i}{c}\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} S_x,$$

alors

$$T_{41} = -\frac{i}{c}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})_x = -\frac{i}{c} S_x.$$

Ainsi le tenseur énergie-impulsion dans un milieu, obtenu par la transformation directe de la quadriforce, n'est plus symétrique et a la forme

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -\frac{i}{c} n^2 S_x \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -\frac{i}{c} n^2 S_y \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -\frac{i}{c} n^2 S_z \\ -\frac{i}{c} S_x & -\frac{i}{c} S_y & -\frac{i}{c} S_z & w \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Nous y avons introduit l'indice de réfraction défini dans la théorie de Maxwell par $n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$. Soulignons une fois de plus que les opérations effectuées n'ont pas défini le tenseur énergie-impulsion d'une façon univoque tant pour le vide que pour le milieu. Le tenseur (60) n'est pas symétrique; la densité d'impulsion qui lui correspond est égale à

$$\boldsymbol{g} = \frac{n^2}{c^2} \boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B}. \tag{61}$$

Ce résultat signifie, en particulier, que lorsque la lumière cheminant dans un milieu attaque un miroir, la pression lumineuse est n^2 fois supérieure à celle exercée dans le vide.

L'antisymétrie du tenseur (60) entraîne que la formule (V, 131) qui généralise la loi de l'inertie de l'énergie

$$g=\frac{S}{c^2} \tag{62}$$

n'est plus vérifiée. On fut alors obligé de remplacer le tenseur antisymétrique (60), appelé *tenseur de Minkowski*, par son équivalent symétrique. Ce dernier, qui satisfait à (62), fut proposé par Abraham. Il est facile de le construire. Procédons à la symétrisation du tenseur (60) en composant l'expression $\frac{1}{2}(T_{ik}+T_{ki})$. D'où le tenseur symétrique

$$T^s_{ik}=-\frac{1}{2c}(F_{im}f_{km}+F_{km}f_{im})+\delta_{ik}\Lambda, \tag{63}$$

dont l'élément spatial correspond au tenseur élastique de Maxwell admis. Toutefois les composantes $T^s_{\alpha 4}$ ont la forme $-\frac{i}{2c}(n^2+1)\,S_\alpha$ et ne vérifient pas la relation (62) qui doit être conservée. Il est possible de tirer profit de l'ambiguïté du tenseur (59) et de trouver un tenseur symétrique tel que dans le système en comouvement ses composantes spatiales soient nulles (et ne changent pas les contraintes de Maxwell) ; les composantes temporelles sont choisies de telle façon que sommées avec les composantes $T^s_{\alpha 4}$ elles fournissent la valeur recherchée de la densité d'impulsion, i.e. (62). Bref, on a besoin d'un tenseur dont les composantes θ'_{ik} posséderaient la propriété suivante: $\theta'_{\alpha\beta}=0$, $\theta'_{\alpha 4}=-\frac{i}{2c}(n^2-1)\,S'_\alpha$. Ainsi, la somme $T^s_{\alpha 4}+$ $+\,\theta'_{\alpha 4}$ assurera l'expression recherchée pour la densité d'impulsion.

Désignons les composantes du quadrivecteur vitesse du milieu par U_i. Alors, pour le repère en comouvement on aura $U'_1=U'_2=$ $=U'_3=0$, $U'_4=ic$. Composons l'expression

$$\mathfrak{F}_l=\frac{1}{c}F_{lk}U_k, \tag{64}$$

où F_{lk} sont les composantes du tenseur (V, 29). Dans le repère en comouvement, les quantités $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ sont égales aux composantes du vecteur $\boldsymbol{E}'$, et $\mathfrak{F}'_4=0$. D'où

$$(\mathfrak{F}'_1,\mathfrak{F}'_2,\mathfrak{F}'_3)=\boldsymbol{E}'. \tag{65}$$

Introduisons maintenant le quadrivecteur $\vec{\Omega}$ ayant pour composantes

$$\Omega_i=\frac{1}{c^4}U_kF_l\,(f_{ik}U_l+f_{kl}U_i+f_{li}U_k), \tag{66}$$

où f_{ik} sont les composantes du tenseur (V, 31). Recherchons les composantes $\vec{\Omega}$ dans le système en comouvement. Dans ce cas, dans (66) seul le terme d'indice $k=4$ sera non nul lors de la sommation

sur k. Le premier terme de la parenthèse ne diffère de zéro que si $l = 4$, pourtant $\mathfrak{F}'_4 = 0$, et ce terme est identiquement nul. Le deuxième terme de la parenthèse est non nul si $i = 4$. Par conséquent, pour $i = 1, 2, 3$ on obtient

$$\Omega'_\alpha = \frac{1}{c^4} U_4'^2 \mathfrak{F}'_i f'_{i\alpha},$$

par exemple,

$$\Omega'_1 = \frac{1}{c^4} U_4'^2 \mathfrak{F}'_i f'_{i1} = -\frac{1}{c^2}(-E'_y H_z + E'_z H'_y) = \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})_x = \frac{S_x}{c^2}.$$

On parvient donc à

$$(\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3) = \frac{\boldsymbol{S}}{c^2}.$$

Quant à Ω'_4, on a

$$\Omega'_4 = \frac{1}{c^4} U'_4 \mathfrak{F}'_i (f'_{4i} + f'_{i4}) = 0.$$

Maintenant il est facile d'écrire le tenseur symétrique θ_{ik} recherché :

$$\theta_{ik} = \frac{n^2-1}{2}(U_i \Omega_k + U_k \Omega_i), \quad \theta_{ik} = \theta_{ki}.$$

Il est évident que dans le référentiel en comouvement ses composantes spatiales ($i, k = 1, 2, 3$) sont évidemment nulles: $\theta'_{\alpha\beta} = 0$. Quant aux composantes $\theta'_{\alpha 4}$, on a

$$\theta'_{\alpha 4} = \frac{n^2-1}{2} U'_4 \Omega'_\alpha = ic\, \frac{n^2-1}{2} \frac{S'_\alpha}{c^2} = i\, \frac{n^2-1}{2} S'_\alpha.$$

La somme $T^s_{ik} + \theta_{ik}$ n'est autre que le tenseur appelé *tenseur d'Abraham* S_{ik} :

$$S_{ik} = -\frac{1}{2c}(F_{im} f_{km} + F_{km} f_{im}) + \delta_{ik}\Lambda - \frac{n^2-1}{2}(U_i \Omega_k + U_k \Omega_i). \qquad (67)$$

D'après la forme générale, ce dernier coïncide avec le tenseur énergie-impulsion d'un champ électromagnétique dans le vide (V, 149). La distinction se trouve dans le fait que dans $T_{\alpha\beta}$, ε_0 et μ_0 sont remplacés par ε et μ. Mais, conformément à (V, 150), la force de volume $\mathscr{K}_\alpha$ du tenseur d'Abraham diffère de celle du tenseur de Minkowski.

Si l'expérience cruciale avait été possible, elle se serait prononcée en faveur du tenseur concret. Pourtant, à présent, comme on l'a remarqué, une telle vérification n'est pas réalisable. Ce qu'on préfère le tenseur d'Abraham n'est qu'une question de goût.

Pourtant, il surgit une situation curieuse. Envisageons de nouveau une onde plane. Pour l'onde plane dans le diélectrique homogène, il existe une relation simple entre le vecteur de Poynting S, la vitesse de phase de l'onde monochromatique v et la densité

d'énergie w:

$$S = wv,$$

où $v = \frac{c}{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$. Les tenseurs de Minkowski et d'Abraham donnent pour la densité d'impulsion respectivement [voir (61), (62)]

$$g_M = \frac{n^2}{c^2} S = \frac{n^2}{c^2} w \frac{c}{n} = \frac{w}{c} n, \tag{68a}$$

$$g_A = \frac{S}{c^2} = \frac{1}{c^2} w \frac{c}{n} = \frac{w}{c} \frac{1}{n}. \tag{68b}$$

Si l'on admet que la densité d'impulsion g est proportionnelle au nombre de quanta, on obtient pour l'impulsion de quantum deux expressions

$$p_M = \frac{\hbar\omega}{c} n, \qquad p_A = \frac{\hbar\omega}{cn},$$

qui correspondent à (68a) et (68b) respectivement.

Quelle est donc l'expression vraie pour l'impulsion de quantum? Qu'est-ce qu'on sait, en général, de l'impulsion quantique dans un milieu? Si le photon dans le milieu est considéré comme une particule relativiste, on obtient $p = \frac{\hbar\omega}{c} n$ à partir de la *formule élémentaire de de Broglie* $\lambda = \frac{\hbar}{p}$ reliant la longueur d'onde d'une particule à son impulsion. En effet, dans un milieu on a $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ où λ_0 est la longueur d'une onde lumineuse dans le vide et, par conséquent, $p = \frac{\hbar}{\lambda} = \frac{\hbar}{\lambda_0} n = p_0 n$. L'impulsion du photon p_0 dans le vide est égale à $\frac{\hbar\omega}{c}$. La même expression de l'impulsion quantique dans un milieu s'obtient par la seconde quantification d'un champ électromagnétique. On peut donc écrire pour l'impulsion du photon

$$\boldsymbol{p} = \frac{\hbar\omega}{c} n\boldsymbol{s}, \tag{69}$$

où $\boldsymbol{s}$ est le vecteur unitaire dans le sens de la propagation de la lumière. Si la pulsation de la lumière ne varie pas lors de la pénétration dans la substance, l'énergie du photon reste également la même. Donc, le quadrivecteur énergie-impulsion du quantum de la lumière dans un milieu est égal à

$$\vec{p}\left(\frac{\hbar\omega}{c} n\boldsymbol{s},\ i\frac{\hbar\omega}{c}\right).$$

Son carré n'est plus nul:

$$\vec{p}^{\,2} = \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 (n^2 - 1). \tag{70}$$

L'expression (69) permet d'obtenir des formules correctes pour l'effet de Vavilov-Tchérenkov, l'effet Doppler, la diffusion de la

lumière par les particules chargées. Donnons un bref exposé de l'*effet de Vavilov-Tchérenkov.* Comme il est bien connu, ce rayonnement surgit lors du mouvement uniforme des particules chargées dans un milieu; il implique la condition d'après laquelle la vitesse des charges soit supérieure à la vitesse de phase des ondes électromagnétiques dans ce milieu. Cela s'obtient aisément à l'aide de (69).

Lors du rayonnement on doit observer le principe de la conservation de la 4-impulsion (i.e. les principes de la conservation de l'énergie-impulsion). Soient $\vec{p}_0$ la 4-impulsion de la particule avant l'émission, $\vec{p}$ après l'émission, et $\vec{k}$ la 4-impulsion du photon:

$$\vec{p}_0\,(m_0\gamma_0 v_0,\quad i\gamma_0 m_0 c),$$
$$\vec{p}\,(m_0\gamma v,\quad i\gamma m_0 c),$$
$$\vec{k}\left(\frac{\hbar\omega}{c}\,ns,\ i\,\frac{\hbar\omega}{c}\right).$$

Ecrivons le principe de la conservation de la 4-impulsion:

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{k}$$

soit, en composantes,

$$p_{0i} - k_i = p_i. \tag{71}$$

En élevant au carré la relation (71), on obtient

$$p_{0i}^2 - 2p_{0i}k_i + k_i^2 = p_i^2,$$

où tous les termes sont sommés sur l'indice i. En vertu de l'invariance du carré de l'impulsion de la particule $p_{0i}^2 = p_i^2$, on aura

$$k_i^2 = 2p_{0i}k_i \tag{72}$$

(on ne simplifie pas par k_i; on a une sommation indépendante à gauche et à droite).

Envisageons séparément le premier et le deuxième membre de (72):

$$p_{0i}k_i = \frac{\hbar\omega}{c}\,nm_0\gamma_0\,(v_0 s) - m_0\gamma\hbar\omega$$

et

$$k_i^2 = \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 (n^2 - 1).$$

Comme $v_0 s = v_0 \cos\vartheta$, où ϑ est l'angle formé par le rayon émis et la direction de la vitesse de la charge, on parvient, à l'aide de (72), à l'égalité

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 (n^2 - 1) = \frac{\hbar\omega}{c}\,nm_0\gamma_0 v_0 \cos\vartheta - m_0\gamma\hbar\omega$$

ou

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)(n^2 - 1) = nm_0\gamma_0 v_0 \cos\vartheta - m_0\gamma c.$$

On obtient finalement :

$$\cos\vartheta = \frac{1}{nm_0\gamma_0 v_0}\left\{\frac{\hbar\omega}{2c}(n^2-1)+m_0\gamma_0 c\right\} =$$

$$= \frac{c}{nv_0}\left\{1+\frac{\hbar\omega}{2m_0c^2}(n^2-1)\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}\right\}.$$

Si $\frac{\hbar\omega}{mc^2} \ll 1$ (ce qui est vrai pour la lumière visible et l'électron), on obtient la condition classique de rayonnement

$$\cos\vartheta = \frac{c}{nv_0} = \frac{V_{ph}}{v_0}. \qquad (73)$$

Comme $\cos\vartheta \leqslant 1$, alors $v_0 \geqslant V_{ph}$.

Cela veut dire que l'effet Vavilov-Tchérenkov n'est possible que dans le cas où la vitesse de la particule dépasse la vitesse de phase de la lumière dans un milieu. Comme $V_{ph} < c$, ce cas est en parfait accord avec les concepts de Relativité restreinte. Dans le vide, ce rayonnement est pourtant impossible, car

$$\cos\vartheta = \frac{c}{v_0}$$

et $v_0 \geqslant c$, ce qui est absurde.

Nous avons donc trouvé la condition correcte du rayonnement Tchérenkov (73) en faisant appel à l'expression pour l'impulsion quantique dans un milieu (69). De prime abord il semble que c'est un argument en faveur du tenseur de Minkowski. Pourtant, le problème s'avère beaucoup plus compliqué, et la transition de la densité d'impulsion du champ à l'impulsion quantique dans un milieu n'est point évidente. Quoique très ancienne, la question attire toujours l'attention des chercheurs (voir la Bibliographie).

Lorsqu'une onde lumineuse passe du vide dans un milieu, l'impulsion n'est emportée par cette onde que partiellement ; une « portion » d'impulsion reste dans le milieu. Là où l'on s'intéresse à l'impulsion transmise totale, il faut employer le tenseur de Minkowski ; s'il s'agit de l'impulsion liée au rayonnement dans un milieu, on a recours au tenseur d'Abraham. L'expression (69) de l'impulsion du photon est correcte pour l'effet Vavilov-Tchérenkov, car dans ce cas il importe de considérer l'impulsion résultante transmise au milieu par l'électron de Tchérenkov. L'impulsion résultante communiquée au photon et au milieu n'est autre que $\frac{\hbar\omega n}{c}$. Il n'est pas étonnant alors que la quantification d'un champ électromagnétique dans les diélectriques aboutit à l'expression (69) pour l'impulsion. Cette expression représente une impulsion résultante d'un champ électromagnétique, liée au champ et à la substance. Si l'on définit les forces agissant sur la substance, on a recours au tenseur d'Abraham. On s'arrête ici, car l'étude détaillée de ce problème ne fait pas l'objet du présent ouvrage.

CHAPITRE VIII

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

54. Interprétation géométrique de la transformation de Lorentz. Quelque temps après la publication en 1905 de l'ouvrage d'Einstein qui avait contenu les idées fondamentales de la Relativité restreinte, Minkowski proposa l'interprétation géométrique de cette théorie. Il démontra que la Relativité restreinte choisit pour la géométrie du monde physique la géométrie pseudo-euclidienne plane. Pour cette raison tous les résultats cinématiques de la Relativité restreinte s'interprètent géométriquement. Bien que la Relativité restreinte ne traite pas des problèmes spécialement géométriques et la géométrie euclidienne spatiale reste toujours en vigueur, la « géométrie » du continuum espace-temps en diffère considérablement.

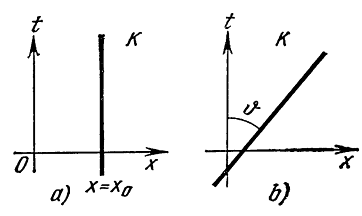


Fig. 25. *a*) La ligne d'univers d'un corps qui est au repos au point $x = x_0$; *b*) la ligne d'univers d'un corps se mouvant uniformément suivant l'axe des x.

Le continuum à quatre dimensions avec les points-événements a été appelé par Minkowski *univers*. Tout événement de l'univers de Minkowski est représenté par le *point d'univers*. Si un événement est caractérisé par la position du corps en un point donné de l'espace à un instant donné, alors la suite d'événements dans l'univers de Minkowski est représentée par une courbe appelée *ligne d'univers* d'un point. Si le corps est au repos dans l'espace, dans l'univers de Minkowski il se meut suivant une certaine ligne d'univers. Envisageons les cas les plus simples. Soit un corps (pour simplifier, on parle toujours d'un point matériel) immobile dans le repère K au point $x = x_0$. Dans le plan (x, t) de l'univers de Minkowski, sa ligne d'univers est une droite parallèle à l'axe des t (fig. 25, *a*). Soit un autre corps qui se meut uniformément dans K suivant l'axe des x avec la vitesse v. Dans ce système sa ligne d'univers est déjà représentée par une droite qui forme l'angle ϑ avec l'axe des t (fig. 25, *b*). On verra dans la suite que $\vartheta = \text{arc tg}\,\frac{v}{c}$. Commençons par l'interprétation géométrique de la transformation de Lorentz. Les coordonnées y et z étant invariables pour une disposition choisie des référentiels,

on ne s'intéresse qu'aux coordonnées x et t. Il est plus commode d'analyser les coordonnées réelles x et $u = ct$ qui représentent le système de référence K. Examinons le mouvement d'un point dans ce système. Il est représenté par la ligne d'univers $x = x(u)$ dans le plan (x, u) (fig. 26).

L'inclinaison de la ligne d'univers par rapport à l'axe des u en tout point donné est définie par la dérivée $\frac{dx}{du}$ en ce point. En effet (voir la fig. 26),

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dx}{du} = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{v}{c}.$$

Ainsi, l'angle d'inclinaison découle de la formule

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{c} = \operatorname{arc\,tg} \beta,$$

où $\beta = \frac{v}{c}$ et v est la vitesse instantanée d'un point (d'un corps). Comme toujours $\beta < 1$, alors, pour tout corps mobile, l'angle ϑ ne peut dépasser 45°. Les rayons lumineux ont pour la ligne d'univers la bissectrice de l'angle formé par les axes de coordonnées.

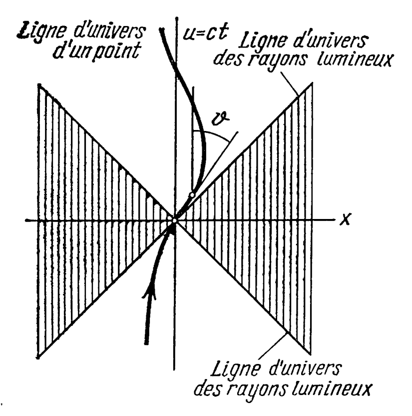


Fig. 26. Système de coordonnées réelles $(x,\ u = ct)$. La position d'un point matériel à un instant donné est définie par un point du plan. Le mouvement du point matériel est représenté sur le plan par une courbe appelée ligne d'univers. Pour les points matériels immobiles les lignes d'univers sont parallèles à l'axe des u. La ligne d'univers des rayons lumineux est la bissectrice de l'angle entre les axes de coordonnées. Si la vitesse du mouvement est variable, l'angle entre la tangente à la ligne d'univers et l'axe des u découle de la relation $\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{c}$ où v est la vitesse instantanée d'un point (d'un corps).

Traçons sur ce schéma les axes du référentiel K'. Conformément à (II, 19), la transformation de Lorentz appliquée à x et u s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} x' &= \Gamma(x - \mathrm{B}u), \\ u' &= \Gamma(u - \mathrm{B}x). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

La transformation inverse s'écrira :

$$\left.\begin{aligned} x &= \Gamma(x' + \mathrm{B}u'), \\ u &= \Gamma(u' + \mathrm{B}x'). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Selon (1) et (2), les origines des référentiels K et K' coïncident (pour $x = 0$ et $u = 0$, on a $x' = 0$ et $u' = 0$). Le point $x' = 0$ (origine de K') se déplace avec la vitesse V relativement à K ; par suite, sa ligne d'univers est une droite faisant l'angle φ avec l'axe des u. L'angle φ est défini par la relation $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \mathrm{B}$. Or, la droite $x' = 0$ est l'axe des temps du référentiel K'. La transformation de Lorentz opérée sur l'axe des u consiste en ce que l'axe des u' est incliné de l'angle φ par rapport à l'axe des u.

L'axe des x' est défini par la condition $u' = 0$. Or, selon (1), cette condition est vérifiée pour la droite $u = Bx$ dans le système K. Certes, l'axe des u' se déduirait aussi en posant $x' = 0$ dans la formule (1), ce qui nous ramènerait à $x = Bu$. Donc, on a pour les équations de nouveaux axes:

$$\left.\begin{aligned} &\text{axe des } u': \quad u = \frac{1}{B} x, \\ &\text{axe des } x' \quad u = Bx. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

L'axe des x' fait l'angle $\varphi = \text{arc tg B}$ avec l'axe des x. Il en découle que la transformation de Lorentz consiste en passage du système

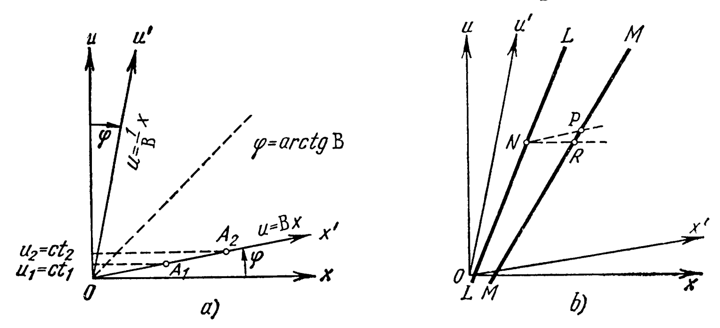


Fig. 27. *a*) La transformation de Lorentz consiste en ce que les axes des x et u tournent d'un même angle $\varphi = \text{arc tg B}$ autour de l'origine vers la bissectrice du premier quadrant pour occuper les positions x' et u'. Les droites $x' = \text{const}$ sont alors parallèles à l'axe Ou' et les droites $u' = \text{const}$ le sont à l'axe Ox' (c'est le passage au système de coordonnées rectilignes obliques). On voit clairement la relativité de la simultanéité: les événements A_1 et A_2 qui sont simultanés dans K' (situés sur la droite $t' = 0$, i.e. sur l'axe des x') ne le sont point dans K (pour trouver les moments qui leur correspondent dans K, on les projète sur l'axe des u à l'aide des droites parallèles à l'axe des x). *b*) On y a mené deux lignes d'univers des corps (LL et MM). La relativité de la distance, séparant les deux corps en mouvement, est évidente. Pour trouver la distance des corps, il suffit de déterminer leurs coordonnées, ces dernières étant obligatoirement simultanées. Supposons qu'un de ces corps se trouve au point N. Du point de vue de K, le second corps est situé au même instant au point R. Mais, d'après K', il est au point P. Les segments NR et NP représentant les distances des corps ne sont pas les mêmes.

de coordonnées rectangulaires x, u au système de coordonnées obliques x', u' ; les axes des x et u s'approchent d'un même angle $\varphi = \text{arc tg B}$ de la bissectrice du premier quadrant (fig. 27). Voilà ce qui signifie une rotation d'un angle imaginaire! La rotation du système d'axes orthogonaux formellement introduite ne ressemble en rien à la rotation du système de coordonnées cartésiennes: dans le cas envisagé les axes de coordonnées se rapprochent, tels des ciseaux, de la bissectrice du premier quadrant.

Une fois les axes des référentiels K et K' construits, on peut interpréter les conséquences qui découlent de la transformation

de Lorentz. La relativité de la simultanéité est spectaculaire. Tous les événements simultanés du repère K' sont traduits par les points correspondants de l'axe des x' ou, d'une façon générale, par ceux des droites $u' =$ const. Soient deux événements A_1 et A_2 situés sur l'axe des x' (simultanés dans K' à $t' = 0$). Pour déterminer les instants, auxquels ces événements ont lieu dans K, il faut les « projeter » sur l'axe des u en traçant les droites parallèles à l'axe des x, car, dans le repère K, les événements sont simultanés sur les droites $u =$ const (fig. 27, *a*). On en déduit que dans K, ces événements ont lieu aux différents instants t_1 et t_2.

Signalons un résultat particulièrement important qui découle de l'analyse de la figure 27, *b*. Il y en a deux lignes d'univers se rapportant aux corps qui se déplacent uniformément mais aux différentes vitesses. La distance des corps est définie à un instant donné par leurs coordonnées simultanées dans le référentiel approprié. La figure en question montre de façon évidente que dans les systèmes K et K' cette distance n'est pas la même à un même instant de temps propre de l'un des corps. En vertu de l'équivalence des référentiels, aucune distance n'est vraie. Mais alors toutes les lois de la mécanique où la force est fonction de la distance deviennent ambiguës pour les corps mobiles. Cette difficulté ne surgissait pas dans la mécanique newtonienne où le temps était absolu.

55. Relativité des longueurs et des intervalles de temps. L'interprétation géométrique des contractions des longueurs et des intervalles de temps ayant lieu lors du changement de référentiel exige l'établissement des échelles unitaires pour chaque axe et dans chaque système de référence. Autrement dit, il faut introduire les unités de longueur et de temps dans tout référentiel.

Il est facile de le faire vu l'équivalence de tous les référentiels d'inertie. En choisissant pour unité de longueur la longueur d'onde de la lumière émise par un atome déterminé (la source est au repos dans le référentiel considéré), on peut être sûr de ce qu'on a la même longueur d'onde dans tout autre référentiel d'inertie si sa source lumineuse est de la même nature et immobile. Seront également stables la fréquence d'oscillations et la période radioactive d'un atome concret immobile dans tout référentiel d'inertie. Il est à noter qu'on est forcé de se servir des résultats de la mécanique quantique qui suppose l'identité des particules élémentaires de même espèce, y compris les atomes et les molécules. En adoptant cette conclusion, on peut obtenir les unités de longueur et de temps universelles pour les référentiels d'inertie.

A cause de la « contraction de Lorentz », l'observateur du référentiel donné constate que les étalons unitaires de longueur s'avèrent plus petits que le sien dans tous les autres référentiels d'inertie. Cela est démontré par la géométrie.

Soient deux hyperboles équilatères dans un plan (x, u):

$$u^2 - x^2 = 1, \qquad (4)$$

$$u^2 - x^2 = -1. \qquad (4')$$

Divisons ce plan en quadrants, dont chacun inclut une branche d'hyperbole. Les lignes limitant les quadrants seront les asymptotes de ces hyperboles. En effet, portons l'équation $u = kx$ d'un rayon à pente arbitraire k ($k = \operatorname{tg} \alpha$), passant par l'origine des coordonnées, dans les équations des hyperboles (4) et (4'). On trouvera que la $x^{\text{ième}}$ coordonnée de l'intersection s'obtient de l'équation $x^2 = \pm \frac{1}{1-k^2}$. Cette équation n'a une racine réelle qu'à la condition $k^2 < 1$. Si $k^2 = 1$, la coordonnée de l'intersection sur l'axe des x tend vers l'infini. Cela signifie que les rayons $u = x$ sont les asymptotes de ces hyperboles. Ainsi donc, les lignes d'univers des rayons lumineux $x = ct$ sont les asymptotes des hyperboles (4) et (4').

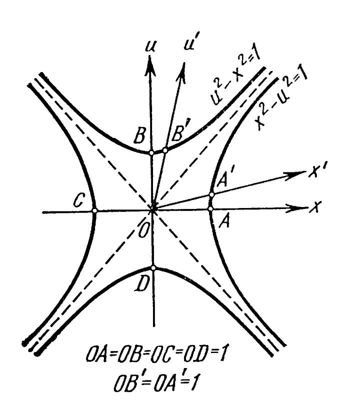


Fig. 28. Dans le système de coordonnées (x, u) sont tracées deux hyperboles équilatères $u^2 - x^2=1$, $x^2-u^2=1$. Etant donné que la transformation de Lorentz laisse invariante l'expression $u^2 - x^2 = c^2t^2 - x^2$, dans les nouvelles coordonnées obliques nous obtenons les hyperboles $u'^2 - x'^2 = 1$, $x'^2 - u'^2 = 1$. Cela veut dire que ces deux hyperboles équilatères coupent les axes des x, u, x', u' respectivement à la distance unité de l'origine de coordonnées. Par conséquent, ces hyperboles sont appelées hyperboles échelle.

Chacune des branches des hyperboles (4) et (4') ne coupe qu'un seul axe, celui des x ou des u. Les points d'intersection de l'hyperbole (4') avec l'axe des x sont fournis par la condition $u=0$. Il en vient que l'hyperbole (4') coupe l'axe des x aux points $x = \pm 1$. De façon analogue on trouve que l'hyperbole (4) coupe l'axe des u aux points $u = \pm 1$. Les hyperboles (4), (4') qui découpent sur les axes de coordonnées les segments unitaires peuvent être logiquement appelées hyperboles échelle.

Comme l'expression $u^2-x^2 = c^2t^2-x^2$ est l'invariant de la transformation de Lorentz, dans le système K' on a aussi les égalités suivantes:

$$u'^2-x'^2=1, \qquad u'^2-x'^2= -1,$$

d'où il vient immédiatement que les mêmes hyperboles coupent sur les nouveaux axes des x' et u' les segments unitaires.

La figure 28 montre avec évidence que les segments unitaires des axes des x et x' ne sont point égaux entre eux. Cependant, il ne faut pas oublier que la représentation du plan pseudo-euclidien sur le plan euclidien est conventionnelle et que les longueurs unitaires « propres » sont choisies identiques. Certes, on pourrait choisir des

unités différentes mais cela entraînerait la modification de la forme de la transformation de Lorentz.

Maintenant, il devient commode d'expliquer du point de vue géométrique la contraction de l'échelle en mouvement. Représentons

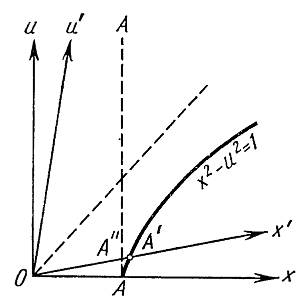


Fig. 29. Interprétation géométrique de la relativité des longueurs des règles. On a représenté la moitié du premier quadrant de la fig. 28. OA est la règle immobile dans K. Les lignes d'univers de ses extrémités sont Ou et AA''. L'hyperbole $x^2 - u^2 = 1$ coupe l'axe des x au point A et l'axe des x' au point A'. Ainsi donc, $OA = 1$ et $OA' = 1$. Pour trouver les positions simultanées des extrémités de la règle dans K', il faut couper les lignes d'univers de celles-ci par quelque droite $u' = \text{const}$, disons par l'axe des x' (qui correspond à l'instant $t' = 0$). Il en vient que la longueur de la règle dans K' est égale à OA''. Mais $OA'' < OA' = 1$.

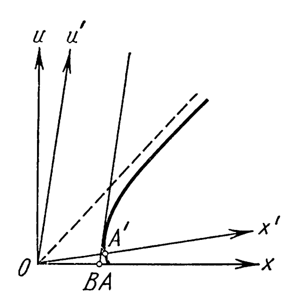


Fig. 30. Cas d'une règle immobile dans K'. Les lignes d'univers de ses extrémités sont les droites parallèles à Ou' (l'axe Ou' lui-même et la droite passant par B). La longueur de la règle dans K se détermine par l'intersection de ces lignes d'univers avec l'axe des x ($t = 0$). Elle est égale à $OB < OA = 1$, ce qui implique la conclusion précédente: la longueur de la règle est la plus grande dans le système où elle est au repos.

sur le même dessin les axes des x, u et des x', u'. Traçons la partie de l'hyperbole passant par le premier quadrant des systèmes de coordonnées K et K' (fig. 29). Le segment OA représente l'échelle unitaire immobile dans K. Ses lignes d'univers dans K sont les droites parallèles à l'axe Ou et passant par les points O et A. Mais, du point de vue du repère K', les positions simultanées des extrémités du segment OA à l'instant $t' = 0$ correspondent aux intersections

de ses lignes d'univers avec l'axe des x', i.e. aux points O et A''. L'échelle unitaire dans K' est égale à OA' ; la figure 29 montre que $OA'' < OA' = 1$.

Supposons maintenant que l'échelle unitaire soit au repos dans le repère K'. Sa longueur est alors égale à OA' et ses lignes d'univers sont parallèles à l'axe Ou' ; l'une d'elles est l'axe même Ou' et l'autre la droite $A'B$. Pour fixer simultanément les extrémités de l'échelle dans le repère K, il faut couper les lignes d'univers de ces extrémités par n'importe quelle droite u = const. Le choix de $u = 0$ s'avère plus logique. Il vient de la figure 30 que $OB < OA = 1$.

Analysons maintenant la relativité des intervalles de temps. Soit une horloge immobile placée à l'origine du référentiel K'. Sa

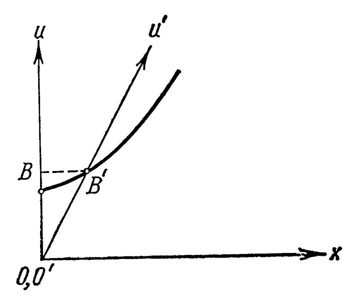


Fig. 31. Interprétation géométrique de la relativité des intervalles de temps entre un couple d'événements. Supposons qu'une horloge immobile soit placée à l'origine O' du référentiel K'. Sa ligne d'univers est confondue avec l'axe Ou'. Au point d'univers B' son indication diffère d'une unité de celle au point O'. Or, le point B' est simultané dans K au point d'univers B (porté par la même droite u = const que le point B'). L'horloge placée au point B et immobile dans K montre le temps défini par OB relativement à l'indication de l'horloge de K placée au point O. On tire de la figure que $OB > OB' = 1$. Cela signifie que l'intervalle de temps mis au déplacement de l'horloge dans le système K' est, du point de vue de K', plus petit que celui mesuré dans K.

ligne d'univers est alors l'axe Ou'. A l'instant $t = 0$, l'horloge mobile était à l'origine du système K où on a comparé son indication avec celle de l'horloge de K', fixée à ce point. Si les origines de deux repères K et K' coïncident à l'instant $t = t' = 0$, les segments OB et OB' correspondent aux indications des horloges de K et K'.

Au point d'univers B', l'indication de l'horloge mobile augmente d'une unité par rapport à son indication au point O. Or, dans le repère K, le point B', porté par la droite u = const, est simultané avec tous les événements représentés par cette dernière. En particulier, cette droite coupe au point B la ligne d'univers de l'horloge placée à l'origine de K. Il en découle que si l'horloge mobile a mesuré le temps OB', l'horloge immobile a mesuré le temps OB. Mais cela veut dire que l'horloge mobile marche plus lentement que l'horloge immobile, car $OB' = 1$ et $OB > 1$ (fig. 31).

Si l'horloge est immobile dans le repère K, elle comptera l'unité de temps au point d'univers B (fig. 32) qui est simultané, dans le référentiel K', avec le point B'' (OB'' est l'indication de l'horloge du repère K' que mesurera l'observateur du repère K au point B''). Le point B'' est l'intersection de l'axe Ou' avec la droite parallèle à l'axe des x' et passant par le point B. Or, $OB'' > OB = 1$; par conséquent, l'horloge mobile « marche au ralenti par rapport à celle immobile ».

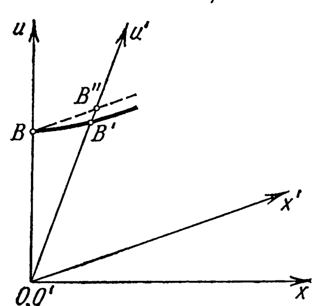


Fig. 32. La même représentation que sur la figure précédente, mais cette fois l'horloge est immobilisée à l'origine de K. Sa ligne d'univers est l'axe Ou. Au point B, l'horloge marquera l'unité de temps. Les événements de K', qui sont simultanés à cet instant, sont représentés par une droite parallèle à l'axe des x' et passant par le point B. Il est évident que $OB' > > OB = 1$, i.e. l'horloge immobile mesurera l'intervalle de temps inférieur à celui marqué par l'horloge mobile.

Considérons encore un cas qui permet d'éclaircir le soi-disant *paradoxe des jumeaux* (le voyageur de Langevin).

Le temps propre d'un corps, comme on le voit dans (IV, 2), est relié directement à l'élément d'arc de la ligne d'univers :

$$d\tau = \frac{ds}{c}.$$

Voilà pourquoi la longueur d'arc de la ligne d'univers d'un corps permet de se prononcer sur le temps propre vécu vraisemblablement par un organisme vivant. Notons, pour les opérations ultérieures, que dans l'espace pseudo-euclidien est valable le théorème pseudo-pythagorien. Sur le schéma bidimensionnel (fig. 33,*a*), le carré construit sur l'hypoténuse AB^2 est égal non pas à la somme des carrés construits sur les côtés AC^2 et BC^2 mais à

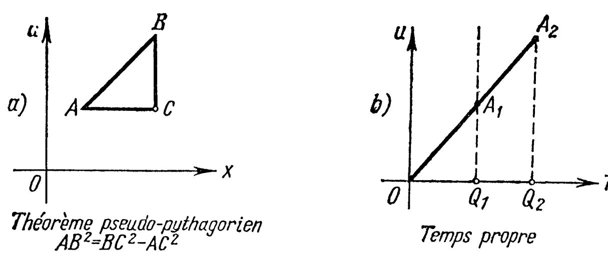


Fig. 33. *a*) Théorème pseudo-pythagorien dans l'espace pseudo-euclidien. *b*) Illustration géométrique de la différence entre les intervalles de temps séparant deux événements dans deux référentiels d'inertie.

leur différence $ds^2 = du^2 - dx^2$, c.-à-d.

$$AB^2 = BC^2 - AC^2.$$

Cette circonstance est à retenir.

La distinction entre le temps propre et le temps mesuré dans le repère, où le corps est en mouvement, est mise en évidence par le schéma suivant (fig. 33, *b*). Supposons qu'on mesure le temps

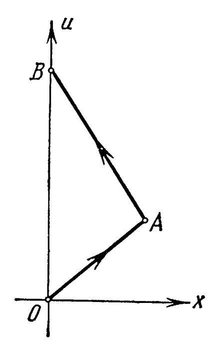


Fig. 34. Lignes d'univers de deux « jumeaux ». La ligne d'univers du « voyageur » est la ligne brisée OAB et celle du « casanier » est la droite OB. Le voyageur éprouve une accélération en changeant au point B le sens de son mouvement, ce qui le place pendant cet intervalle de temps dans le système non inertial. La longueur de la ligne d'univers d'un corps détermine l'intervalle de temps propre de ce corps. Il en découle clairement que l'intervalle de temps propre du voyageur est inférieur à celui du casanier (voir théorème pseudo-pythagorien, fig. 33).

de façon qu'à l'instant $t = t' = 0$ les origines de K et de K' coïncident ; l'horloge Q' est placée à l'origine de K'. La ligne d'univers de l'horloge Q, immobile dans K, est une droite parallèle à l'axe des u. Aux points d'univers A_1, A_2, . . . on procède à la confrontation de l'horloge Q' avec les horloges Q_1, Q_2, . . ., synchronisées dans K et indiquant aux points cités le même temps unique pour K. Sa valeur est donnée par la longueur de la ligne d'univers Q_1A_1 pour le point d'univers A_1. Mais pour l'horloge Q' la longueur de la ligne d'univers de passage de O' à A_1 est devenue égale à OA_1. Or,

$$OA_1^2 = Q_1A_1^2 - OQ_1^2,$$

d'où $OA_1 < Q_1A_1$. Il s'ensuit donc que l'horloge Q' retarde sur les horloges Q_1, Q_2, . . ., qui sont immobiles et synchronisées dans le référentiel K.

Soient deux hommes (« jumeaux ») qui se trouvent au point O. L'un d'eux (« voyageur ») se met en mouvement et effectue un mouvement rectiligne et uniforme à l'exception d'un très bref intervalle de temps quand il change sa vitesse pour revenir au point O. L'autre jumeau reste tout le temps au point O. La figure 34 montre que la ligne d'univers OAB du « voyageur » est plus longue que celle du « casanier ». Comme il vient du théorème pseudo-pythagorien, le temps propre vécu par le voyageur est plus court que celui du casanier. Ce problème sera étudié plus en détail au chapitre IX.

56. Apparition de la charge volumique dans un conducteur neutre traversé par le courant. Ce cas peut être interprété, lui aussi, géométriquement. On a déjà vu que si, dans le repère K, un conducteur était traversé par le courant de telle façon que la densité moyenne de charge y soit nulle, alors, dans le référentiel K' (où le conducteur est en mouvement) apparaît une densité de charge dif-

férente de zéro. Supposons que le conducteur soit au repos dans le repère K ; ses ions sont immobiles, tandis que les électrons se meuvent avec une vitesse moyenne v. Dans le référentiel K, les lignes d'univers des ions sont représentées par les droites parallèles à l'axe Ou et celles des électrons par les droites faisant un angle $\vartheta = \text{arc tg}\,\frac{v}{c}$ avec l'axe des u.

Sur la figure 35 sont représentés les systèmes de référence K (x, u) et K' (x', u'), les lignes d'univers des ions (lignes en pointillé) et les lignes d'univers des électrons (les droites fines continues inclinées sous l'angle ϑ par rapport à l'axe des u). Comme en moyenne

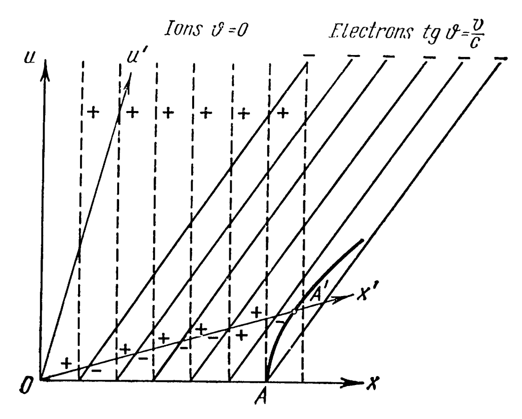


Fig. 35. Le diagramme de Minkowski met en évidence l'apparition de la densité de charge dans un conducteur traversé par le courant et considéré dans le système K'. Lorsqu'il est repéré par le système K, la densité de charge totale due aux charges des ions et électrons est nulle. Le courant est créé par le mouvement des électrons, les ions sont immobiles. Sur le diagramme, les lignes d'univers des ions sont représentées en pointillé et celles des électrons par les droites continues inclinées. En plus du système K (axes des x, u), on a tracé le repère K' (axes des x', u'). On a tracé aussi l'hyperbole échelle marquant les segments unitaires sur les axes des x et x'. La densité de charge est mesurée simultanément dans tous les points d'un corps, donc dans tous les points sur l'axe des x ou x' respectivement. Or, le schéma montre que si dans le repère K le segment unitaire contient le même nombre d'ions et d'électrons, le segment unitaire de K' possède plus d'ions que d'électrons. Il en découle l'apparition de la densité de charge positive dans le système K'.

le métal est neutre, le nombre des lignes d'univers des ions partant de chaque parcelle du conducteur est égal à celui des lignes d'univers des électrons. Les mesures de la densité de charge sont effectuées simultanément dans chaque système de référence. Dans le repère K, la densité est déterminée par le nombre des lignes d'univers des ions et des électrons, lignes qui traversent l'unité de longueur dans ce repère. Par exemple, la densité de charge est définie par le nombre des lignes d'univers des ions (pris avec le signe +) et le

nombre de celles des électrons (pris avec le signe —) traversant OA. L'hyperbole échelle coupe les segments unitaires sur les axes des x et x'. C'est à ces segments qu'il faut rattacher les charges. Mais dans le repère K', la densité de charge doit être calculée simultanément pour tout le conducteur. Les événements simultanés sont représentés dans le système K' par les droites parallèles à l'axe des x' et par l'axe des x' lui-même. Il vient de la figure 35 que le segment unitaire OA' contient plus de charges positives que de charges négatives. C'est pourquoi le conducteur est chargé positivement dans le repère K', bien qu'il soit neutre dans le système K.

Annexe

Théorie de la relativité du point de vue de la méthode de radar (méthode du facteur k)

L'avantage de cette méthode consiste en ce qu'elle permet d'obtenir les conséquences cinématiques fondamentales de la Relativité restreinte sans introduire explicitement les systèmes de coordonnées.

Les simplifications faites dans cette méthode sont les suivantes. On ne considère que les événements sur l'axe des x (et sur l'axe des x' du repère K' respectivement), autrement dit, on traite du problème unidimensionnel. Les positions mutuelles des repères K et K' sont les mêmes que sur la figure 1.

Tous les raisonnements sont des « expériences idéalisées » qui consistent en échange des signaux lumineux, c.-à-d. en émission, réflexion et réception des signaux lumineux. Ce jeu de lumière nous fournira finalement des conséquences cinématiques intéressantes de la Relativité restreinte.

Le point de départ de la méthode considérée est l'effet Doppler, d'après lequel la fréquence de la lumière captée par le récepteur est fonction du mouvement relatif de la source lumineuse et du récepteur. Ce mouvement s'effectue le long d'une ligne droite xx' et détermine ainsi l'effet Doppler longitudinal (voir le paragraphe 48).

La variation de la fréquence détectée dans le repère K' par rapport à la fréquence mesurée dans K, où la source lumineuse est immobile, implique les raisonnements suivants. Si depuis quelque point du référentiel K un radar immobile émet des impulsions de courte durée de période T, l'observateur du repère K', qui s'éloigne du radar à la vitesse constante, trouvera que l'intervalle entre les signaux lumineux reçus sera autre quoique l'horloge du radar et celle de l'observateur marchent au même rythme.

Pour plus de simplicité, on parlera, au lieu du radar et du récepteur, de deux observateurs A et A' immobiles dans K et K' respectivement. Ainsi donc, si l'observateur A envoie des signaux lumineux avec un intervalle de temps T, l'observateur A' les recevra avec un intervalle de temps différent. Désignons ce dernier par kT. Il apparaît ainsi le facteur k qui est à la base de la méthode considérée.

Soulignons que les intervalles T et kT sont mesurés entre l'envoi (réception) du premier et du second signal par les horloges des observateurs A et A' immobiles dans K et K' respectivement.

Les propriétés fondamentales de l'espace et du temps, à savoir l'isotropie et l'homogénéité, permettent d'admettre que le facteur k ne dépend ni des coordonnées de la source et du récepteur, ni du temps de l'émission et de la réception du signal, ni de la direction des signaux (en d'autres termes, la direction de l'axe commun xx' dans l'espace peut être choisie arbitrairement). Ce coefficient ne dépend non plus de l'intervalle séparant les signaux voisins. Il ne

dépend que de la vitesse relative des observateurs A et A'. En effet, la variation de la fréquence de la lumière due à l'effet Doppler ne dépend que de la vitesse du mouvement relatif (voir le paragraphe 48).

La cause physique de l'apparition du coefficient k est bien évidente. Supposons que l'observateur A se trouve à l'origine du référentiel K et envoie des signaux lumineux vers l'observateur A' situé à l'origine du repère K'. Le système K' s'éloigne à droite par rapport au repère K. Admettons que le premier signal soit envoyé à l'instant t. Il n'est pas alors difficile de déterminer l'instant τ_1 de la réception de ce signal par l'observateur A' d'après l'horloge A. En effet, le signal, cheminant à la célérité c, doit parcourir, au bout du temps τ_1, premièrement, le chemin $V \cdot t$ qui séparait les observateurs A et A' à l'instant t et, deuxièmement, la distance $V \cdot \tau_1$ que parcourra l'observateur A' au bout du temps τ_1: $c\tau_1 = Vt + V\tau_1$, d'où $\tau_1 = \frac{V}{c-V}\, t$. Le second signal est émis à l'instant $t + T$ et il parviendra à A' en τ_2, qui s'obtient de la relation: $c\tau_2 = V(t+T) + V\tau_2$, d'où $\tau_2 = \frac{V(t+T)}{c-V}$. La différence $\tau_2 - \tau_1 = \frac{V}{c-V} \cdot T$ montre l'intervalle de temps entre les réceptions des signaux successifs par l'observateur A'. Cependant, ce n'est point l'expression pour k. Le coefficient k ne peut apparaître qu'après avoir déterminé l'intervalle de temps séparant deux réceptions successives des signaux d'après l'horloge de l'observateur A'.

Jusqu'ici, nous nous sommes appuyés seulement sur l'homogénéité et l'isotropie de l'espace-temps. Dès maintenant, on utilisera très souvent la constance de la vitesse de la lumière dans le vide dans tous les référentiels d'inertie. Cette condition peut être formulée très simplement: « la lumière ne peut dépasser la lumière ». Ci-dessous, on utilisera manifestement l'équivalence de tous les observateurs inertiaux.

Nous avons admis que les signaux envoyés par l'observateur A avec l'intervalle de temps T parviennent à l'observateur A' (d'après sa montre) avec l'intervalle kT. En vertu de l'équivalence des observateurs, nous devons adopter que les signaux émis par A' avec l'intervalle T' arrivent à A avec l'intervalle kT'. C'est bien l'application du principe de la relativité à deux observateurs inertiaux A et A'.

Nous allons trouver l'expression explicite du facteur k en fonction de la vitesse du mouvement relatif. On n'aura besoin que de quelques expériences idéalisées liées à l'émission, à la réception et à la réflexion des signaux lumineux. La réflexion peut s'interpréter comme l'émission du signal par l'« observateur » dans le sens inverse au moment même de la réception du signal direct.

Supposons que le premier signal soit envoyé par l'observateur A vers A' à l'instant où les repères K et K' coïncident. Les observateurs A et A' rattachés chacun à son référentiel se trouvent à cet instant en un même point.

La transmission de ce signal de A à A', tout comme celle du signal inverse de A' à A, ne prend aucun temps. Au bout de l'intervalle de temps T, A envoie un signal lumineux fixé par son horloge vers l'observateur A' qui reçoit ce signal dans l'intervalle kT après la réception du premier signal. Après avoir reçu le second signal, l'observateur A' envoie immédiatement un signal lumineux vers A ; il peut aussi bien se servir de la réflexion sur miroir. D'après l'horloge de l'observateur A', deux signaux sont séparés par l'intervalle de temps kT. Les retours des signaux de A' à A seront donc séparés par le même intervalle de temps. Mais l'observateur A ne les recevra pas dans l'intervalle de temps kT ; pour lui, l'intervalle sera k fois plus grand: k^2T. Donc, d'après la montre A, le second signal de retour sera reçu à l'instant k^2T. Il vient alors que, selon l'observateur A, le chemin du second signal (envoyé à l'instant T) vers l'observateur A' et son retour prendront un temps $k^2T - T = (k^2 - 1)\, T$. La vitesse de la lumière étant égale à c dans les deux sens, le temps mis par la lumière pour parcourir la distance de A à A' (ou du retour) est égal à $\frac{1}{2}\,(k^2 - 1)\, T$. Il en

vient clairement que la distance entre A et A' (fixée à l'instant de réflexion) déterminée par la méthode de radar est égale à $\frac{1}{2}(k^2-1)Tc$.

Ainsi, nous avons mesuré la distance entre les observateurs A et A' à l'instant de réflexion du signal. Mais à quel instant la réflexion a-t-elle lieu selon l'horloge A ? Remarquons qu'il s'agit de l'horloge contiguë à l'observateur A, tandis que l'événement (la réflexion au point A') est considéré en un point éloigné de A. Dans ce cas, la mesure directe du moment de réalisation de l'événement n'est plus possible et l'on doit *attribuer* à ce dernier un certain moment de temps.

Or, la vitesse de la lumière est la même dans les deux sens. Le second signal a été envoyé à l'instant T et son retour est fixé à l'instant k^2T. Il en vient que l'instant de réflexion se déduit comme suit: $\frac{1}{2}(T+k^2T)=\frac{1}{2}(k^2+1)T$. Au bout de l'intervalle de temps $\frac{1}{2}(k^2+1)T$ l'observateur A' s'éloigne de la distance $\frac{1}{2}(k^2-1)Tc$ de l'observateur A, ce qui veut dire que la vitesse relative V des observateurs est égale à

$$V=\frac{\frac{1}{2}(k^2-1)Tc}{\frac{1}{2}(k^2+1)T}$$

ou en notation habituelle $\mathrm{B}=\frac{V}{c}$:

$$\mathrm{B}=\frac{k^2-1}{k^2+1}. \tag{1}$$

D'où *)

$$k=\sqrt{\frac{1+\mathrm{B}}{1-\mathrm{B}}}. \tag{2}$$

Si la vitesse relative (la quantité B) change de signe, le nombre k est remplacé par $\frac{1}{k}$ d'après la formule (2). Ainsi, pour une même valeur absolue de la vitesse relative, à l'approche ou à l'éloignement correspondent les valeurs inverses de k.

Considérons maintenant le cas de trois repères K, K' et K'' dont les origines respectives O, O' et O'' sont occupées par trois observateurs. Soit $k = k(A, A')$ le facteur caractérisant le couple d'observateurs A et A'. Il ne dépend que de la vitesse relative V des repères K et K'. Si la vitesse relative des observateurs A' et A'' est égale à W, le facteur $k = k(A', A'')$ ne dépend que de W. Peut-on trouver $k(A, A'')$ si $k(A, A')$ et $k(A', A'')$ sont connus?

Supposons que l'observateur A envoie deux signaux lumineux séparés par l'intervalle de temps T mesuré à l'aide de son horloge. L'observateur A' les recevra séparés par l'intervalle $k(A, A')T$, comme il vient de la définition du facteur k. La fixation du temps s'effectue ici d'après l'horloge A'. L'observateur A'' est plus éloigné de A que A' et les signaux, une fois A' passé, se propagent vers A''. Quand le premier signal de A arrive à l'observateur A', celui-ci, sans tarder (rien d'étonnant car c'est une expérience idéalisée) envoie lui-même un signal vers A''. Les deux signaux: l'un émis directemet par A et l'autre envoyé par A', se propagent maintenant vers A''. Les deux signaux sont lumi-

*) Cette formule définit la variation de la fréquence de la lumière lors de sa réflexion sur un miroir mobile (voir le paragraphe 51).

neux, cheminent à la même vitesse et sont envoyés de A' au même instant. Pratiquement, ils voyagent comme un seul signal.

L'observateur A' effectue la même opération au moment de l'arrivée du second signal de A. De nouveau, de A vers A'' se propage un signal composé de deux impulsions lumineuses: l'une envoyée par A et l'autre par A'.

L'observateur A'' recevra deux signaux. D'une part, d'après sa montre, il trouvera pour l'intervalle de temps entre les arrivées de ces signaux l'expression suivante:

$$k\,(A,\ A'')\ T.$$

D'autre part, les mêmes signaux envoyés par l'observateur A' étaient séparés par l'intervalle de temps $k\,(A,\ A')\ T$. L'observateur A'' trouve que l'intervalle de temps entre les arrivées de ces signaux est égal à

$$k\,(A',\ A'')\cdot k\,(A,\ A')\ T.$$

Or, les signaux de A et de A' ont atteint A'' simultanément, par suite:

$$k\,(A,\ A'') = k\,(A,\ A')\cdot k\,(A',\ A'').$$

Le résultat est remarquablement simple. Si l'on connaît les facteurs k de deux couples de référentiels comprenant un référentiel commun, on peut déterminer le k inconnu des deux autres repères par simple produit des facteurs k connus.

Les raisonnements ci-dessus montrent clairement que les moments de réalisation des événements et les intervalles de temps entre les événements varient selon les observateurs. En effet, revenons à l'exemple étudié de l'échange des signaux lumineux entre les observateurs A et A'. Rappelons que le premier « échange » des signaux se fait au moment où les observateurs se trouvent dans un même point. Ce même moment correspond à la mise à zéro des horloges A et A'. Ensuite A envoie un signal vers A' dans l'intervalle de temps T d'après sa montre; par définition, l'intervalle séparant les réceptions du premier et du second signal par l'observateur A' est égal à kT. Pourtant, l'observateur A *attribuera* à l'arrivée du signal en A' le moment $\frac{1}{2}(k^2+1)\ T$. Donc, A est convaincu que les signaux séparés par l'intervalle de temps T arrivent en A' avec l'intervalle égal à $\frac{1}{2}(k^2+1)\ T$. On a déjà vu que d'après la montre A' le même intervalle est égal à kT. Ainsi, les intervalles de temps séparant les mêmes événements, arrivées du premier et du second signal en A', sont différents: pour A', il est égal à kT, pour A à $\frac{1}{2}(k^2+1)\ T$. On a trouvé, par conséquent, que le moment de réalisation de l'événement (arrivée du second signal) est relatif, car il est égal à kT pour A' et à $\frac{1}{2}(k^2+1)\ T$ pour A. L'intervalle de temps du couple d'événements diffère, lui aussi, pour A et A'. Cela veut dire que le moment de réalisation des événements et l'intervalle séparant ces événements sont des grandeurs relatives. Elles deviennent absolues dans le cas où

$$kT \sim \frac{1}{2}(k^2+1)\ T,$$

soit pour $k \sim 1$ ou, encore, comme il vient de (2), pour $\frac{V}{c} \to 0$, comme il se doit.

Le temps propre. La méthode du facteur k permet aisément d'établir la relation existant entre l'intervalle de temps d'un couple d'événements ayant lieu en un même point d'un repère (le temps propre) et donc fixés par une même

horloge et l'intervalle de temps du même couple d'événements fixés par l'horloge d'un autre repère où les événements considérés affectent les différents points.

Revenons à l'échange de reflets de lumière. Si A émet des signaux séparés d'après sa montre par l'intervalle T, d'après la montre de A' ils sont séparés par l'intervalle kT. Nous avons déjà vu que du point de vue de A, cet intervalle est égal à $\frac{1}{2}(k^2+1)\,T$. Le rapport entre ces grandeurs nous fournit justement la relation entre le temps propre $\Delta\tau = kT$ et le temps Δt mesuré par deux horloges d'un autre référentiel (le fixage par deux horloges est équivalent à ce que nous attribuons le moment à l'événement éloigné de l'horloge d'une certaine distance *)). Ce rapport vaut

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t}=\frac{kT}{\frac{1}{2}(k^2+1)\,T}=\frac{2k}{k^2+1}=\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,,$$

où, dans la dernière expression, on se sert de (1). L'intervalle de temps propre entre les événements est toujours minimal.

Relativité des longueurs des règles (des distances). Soient deux points immobiles du référentiel où l'observateur A' est au repos. Supposons que ce sont les extrémités d'une règle (cette supposition n'est pas, d'ailleurs, obligatoire). Admettons que la règle s'éloigne de l'observateur A ; l'observateur A' se trouve à l'extrémité la plus proche de A (n'oublions pas que la règle suit la direction de la vitesse relative).

Pour mesurer la longueur de la règle, l'observateur A envoie un signal à l'instant t_1 (indiqué par sa montre) et attend le retour de ce signal après sa réflexion sur l'extrémité éloignée de la règle. Soit t_4 ce moment d'arrivée (d'après l'horloge A). L'instant de réflexion du signal est évidemment égal à $\frac{1}{2}(t_1+t_4)$. De façon analogue on envoie le signal vers l'extrémité proche (disons à l'instant t_2) et on le reçoit réfléchi (disons à l'instant t_3). L'instant de réflexion du signal par l'extrémité proche est égal à $\frac{1}{2}(t_2+t_3)$. Pour que les deux réflexions soient simultanées (selon l'horloge A) il faut que

$$\frac{1}{2}(t_1+t_4)=\frac{1}{2}(t_2+t_3). \tag{3}$$

Dans l'expérience idéalisée cette égalité est assurée par un choix convenable des instants d'émission du premier et du second signal.

L'observateur A', situé à l'extrémité proche de la règle, reçoit le premier signal de A à l'instant kt_1 (rappelons que les origines de temps de A et A' coïncidaient lorsque les observateurs étaient au même point). Réfléchi sur l'extrémité éloignée de la règle, le signal qui arrive en A à l'instant t_4 passera A' à l'instant $\frac{t_4}{k}$. En effet, le signal reçu par A' à l'instant $\frac{t_4}{k}$ atteindra A à l'instant $\frac{t_4}{k}\cdot k = t_4$.

Du point de vue de l'observateur A', la longueur double l_0 de la règle est égale au produit de l'intervalle de temps, nécessaire à la lumière pour arriver à l'extrémité éloignée et revenir, par la vitesse de la lumière, c.-à-d.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t_4}{k}-kt_1\right)\cdot c = l_0. \tag{4}$$

*) Il est facile de voir l'équivalence de l'« attribution » du moment à un événement éloigné et à la synchronisation des horloges préliminaire. Le « moment attribué » est exactement celui que marquerait l'horloge placée au point affecté d'un événement et synchronisée avec l'horloge de l'origine de référence.

La relation entre t_2 et t_3 découle de la définition du facteur k:

$$t_3 = k^2 t_2. \tag{5}$$

La longueur de la règle mesurée par A est la différence des distances entre l'observateur A et les extrémités éloignée et proche de la règle, à condition que ces distances soient déterminées simultanément. L'égalité (3) assure cette condition. La distance entre A et l'extrémité éloignée est égale à $\frac{1}{2}(t_4 - t_1)\,c$ et celle entre A et l'extrémité proche vaut $\frac{1}{2}(t_3 - t_2)\,c$. Donc, A prend pour la longueur l de la règle la quantité

$$l = \frac{1}{2}\{(t_4 - t_1) - (t_3 - t_2)\}\,c. \tag{6}$$

Les expressions (4)-(6) permettent de trouver la relation entre l et l_0. La formule (3) fournit $t_4 = t_2 + t_3 - t_1$. En portant l'expression de t_4 dans le premier membre de (4) et compte tenu de (5), on a:

$$l_0 = \frac{c}{2}\left(\frac{t_2 + t_3 - t_1}{k} - kt_1\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{t_2(k^2+1) - t_1(k^2+1)}{k}\right) =$$

$$= \frac{c}{2}\,\frac{k^2+1}{k}\,(t_2 - t_1). \tag{7}$$

Comme, selon (3), $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$, il vient de (6):

$$t_2 - t_1 = \frac{(t_2 - t_1) + (t_4 - t_3)}{2} = \frac{(t_4 - t_1) - (t_3 - t_2)}{2} = \frac{l}{c}.$$

Il s'ensuit que (7) peut se mettre sous la forme $l_0 = l\left[\frac{k^2+1}{2k}\right]$. Mais, conformément à (2), on a $\frac{2k}{k^2+1} = \sqrt{1 - \mathrm{B}^2}$. Donc, on est ramené à nouveau à la formule (III, 1):

$$l = l_0\sqrt{1 - \mathrm{B}^2}.$$

Déduction de la transformation de Lorentz par la méthode du facteur k. Soient deux repères K et K' dont les observateurs A et A' enregistrent le même événement. Les origines de temps des deux systèmes sont choisies de façon que $t = t' = 0$ lorsque les origines O et O' coïncident. Ensuite, à l'instant t_1, l'observateur A envoie un signal à A' qui le reçoit (d'après son horloge) à l'instant t'_1; le signal envoyé par A chemine plus loin accompagné du signal transmis par A' à l'instant de réception du signal de A. Au fait, il ne s'agit que de la propagation, le long de l'axe des x, d'un seul signal composé de deux. Supposons que l'événement P consiste en arrivée de ce signal dans un certain point ou que celle-ci coïncide avec la réalisation d'un certain événement. A ce point le signal est renvoyé (soit par réflexion, soit par l'émission d'un nouveau signal à l'instant de l'arrivée du premier). Il rencontre d'abord l'observateur A' qui, à cet instant t'_2, lui adjoint son propre signal vers A. Maintenant c'est déjà depuis A' que se propage un signal composé de deux. Celui-ci est reçu par A à l'instant t_2.

Les coordonnées de P, d'après l'observateur A, sont calculées de la façon suivante. Le temps t n'est qu'une demi-somme des temps de l'envoi et de la réception du signal, la vitesse de la lumière étant la même sur tout le parcours aller et retour:

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2). \tag{8}$$

La distance du point affecté de l'événement est déterminée en multipliant la vitesse c de la propagation du signal par le temps aller qui est la moitié du temps total mis au parcours aller et retour. Le signal décrit une boucle au bout de temps $t_2 - t_1$, c'est pourquoi, la coordonnée x est donnée par l'observateur A comme suit:

$$x = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)\, c. \tag{9}$$

Les formules (8) et (9) fournissent

$$t_1 = t - \frac{x}{c}, \qquad t_2 = t + \frac{x}{c}. \tag{10}$$

De même, l'observateur A' trouvera

$$t_1' = t' - \frac{x'}{c}, \qquad t_2' = t' + \frac{x'}{c}. \tag{11}$$

Comparant les intervalles entre les échanges de signaux et compte tenu de la définition de k, il vient:

$$t_1' - 0 = k\,(t_1 - 0), \quad t_2 - 0 = k\,(t_2' - 0). \tag{12}$$

En remplaçant t_1' et t_1 conformément à (10) nous obtenons

$$t' - \frac{x'}{c} = k\left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{13}$$

$$t + \frac{x}{c} = k\left(t' + \frac{x'}{c}\right) \text{ ou } t' + \frac{x'}{c} = \frac{1}{k}\left(t + \frac{x}{c}\right). \tag{14}$$

En faisant le produit croisé des égalités (13) et (14), on obtient immédiatement que la quantité

$$t'^2 - \frac{x'^2}{c^2} = t^2 - \frac{x^2}{c^2}$$

se conserve dans tous les référentiels d'inertie, i.e. qu'elle est un invariant. (13) et (14) donnent

$$t' = \frac{k^2+1}{2k}\, t - \frac{k^2-1}{2kc}\, x, \tag{15}$$

$$x' = \frac{k^2+1}{2k}\, x - \frac{k^2-1}{2k}\, c \cdot t. \tag{16}$$

En utilisant les définitions (III, 7), exprimons les facteurs dans les transformations (15) et (16) au moyen de Γ et B:

$$\frac{k^2+1}{2k} = \Gamma, \qquad \frac{k^2-1}{2k} = \Gamma \mathrm{B}.$$

Ainsi donc, on a retrouvé la transformation de Lorentz (II, 8):

$$x' = \Gamma\,(x - Vt),$$

$$t' = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}\, x\right).$$

Il est à noter que les expériences idéalisées, dont on se sert dans cette déduction, ne limitent en rien les événements analysés et la déduction présentée est donc générale.

CHAPITRE IX

PARADOXES DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

Le mot « paradoxe » a plusieurs significations. L'une d'elles sous-entend un point de vue original qui est contraire à l'opinion commune. Cela s'applique exactement aux paradoxes de la Relativité restreinte, dont les bases mêmes (concepts du temps et de l'espace) s'écartent des notions usuelles solidement plantées dans notre esprit par l'expérience journalière. Ces habitudes ont pris depuis longtemps un caractère général et sont liées à ce qu'on nomme le « bon sens ». Ce dernier est, par ailleurs, un ensemble de nos préjugés, dont certains sont erronés. Le développement de la science exige la révision de maintes conceptions invétérées qui ne s'avèrent vraies qu'approximativement. La Relativité restreinte fournit l'exemple d'une telle critique. On croyait le temps absolu. Cette représentation était, d'ailleurs, suffisamment argumentée. La théorie de la relativité a montré que la mesure du temps est relative. Mais il est difficile de l'admettre psychologiquement, d'autant plus que cette relativité ne se relève que sous les conditions spéciales n'ayant rien de commun avec la vie coutumière. La relativité du temps, de la simultanéité et des intervalles de temps entre les événements entraîne la relativité des longueurs des règles qui sont en mouvement relatif. Au point de vue du bon sens qui nous retient dans l'emprise du temps absolu, cela paraît paradoxal. Or, ce n'est point ainsi pour la physique de nos jours. La relativité de la durée est une conception moderne de la mesure du temps. C'est aussi la conclusion à laquelle conduit le matérialisme dialectique proclamant que le temps, en tant que réalité objective liée à l'existence de la matière, peut dépendre du mouvement de celle-ci.

Les effets « paradoxaux » de la cinématique relativiste sont bien connus et font depuis longtemps l'objet de vulgarisation. Il s'agit de la relativité des longueurs des échelles (« contraction » des longueurs), de la relativité de la simultanéité et de la distance de deux événements, de la relativité des intervalles de temps entre les événements. Ces cas ont été détaillés dans les paragraphes 16, 17 et nous n'y reviendrons plus. Au paragraphe 57 nous nous arrêtons sur le problème de la masse au repos nulle ; dans les paragraphes 59 et 60 seront donnés quelques paradoxes de la Relativité restreinte.

57. Masse au repos nulle. On a déjà rencontré quelques exemples où la masse au repos était nulle. Citons, à cet égard, le cas d'une onde plane limitée (train d'ondes) et celui d'un photon. Il paraît que la particule la plus pénétrante, neutrino, s'y rapporte également. Il a été déjà mentionné que la matière possédant la masse au repos finie est équivalente à celle dont la masse au repos est nulle. Ces formes de la matière se transforment mutuellement. Voici quelques exemples d'une telle transformation. Envisageons, par exemple, la création par des quanta γ (photons à haute énergie) des couples « électron-positron » et la réaction inverse se produisant au cours de la collision de l'électron avec le positron (cette réaction est connue sous le nom un peu démodé d'« annihilation » des particules). Pendant la réaction, les particules ayant la masse au repos finie cessent d'exister en donnant lieu aux deux photons. Le trait essentiel de cette réaction est qu'elle vérifie les principes de la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Les photons (particules sans masse au repos), aussi bien que l'électron et le positron (particules ayant la masse au repos finie), possèdent l'impulsion et l'énergie déterminées. Les sommes des grandeurs correspondantes se conservent au cours de cette réaction ; la réalité objective (photon) est caractérisée par son impulsion et par son énergie.

Considérons la collision de l'électron avec le positron dans le référentiel du centre d'inertie de ce couple de particules (qui s'y meuvent l'une à la rencontre de l'autre avec les vitesses v_1 et v_2 égales mais de sens opposé). Le principe de la conservation de l'énergie s'écrira sous la forme

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}+\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}=2h\nu. \tag{1}$$

Cette égalité traduit le fait que l'énergie totale de l'électron et du positron est égale à l'énergie de deux photons créés. Compte tenu de ce que dans le système du centre d'inertie $v_1 = v_2$, il vient pour la fréquence des photons observés :

$$\nu=\frac{m_0c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{2}$$

L'égalité des énergies des photons naissants découle du principe de la conservation de l'impulsion. En effet, les impulsions des photons sont égales en valeur absolue (mais de sens opposé) et l'impulsion du photon est proportionnelle à son énergie.

La valeur inférieure de la fréquence observée ($v \sim 0$) est en bon accord avec l'expérience. La formule (1) sert surtout à illustrer l'inutilité de l'introduction de la masse du photon. En divisant les deux membres de (1) par c^2, nous obtenons le principe de la con-

servation de la « masse »:

$$m_0\gamma = \frac{h\nu}{c^2}$$

qui n'ajoute rien à la signification de la formule (1).

Voici encore un exemple de la transformation de la matière dont la masse au repos est nulle en une matière usuelle. Il s'agit de l'échauffement des corps par les rayons du Soleil. Le corps absorbe des rayons solaires (photons) et acquiert une certaine quantité de chaleur ΔQ, ce qui fait accroître sa masse au repos de

$$\Delta m = \frac{\Delta Q}{c^2}.$$

Ainsi donc, la lumière dépourvue de masse au repos augmente celle d'un autre corps.

Certes, il ne s'agit pas ici de la transformation de l'« énergie » en « masse ». C'est la transformation d'une forme de la matière en une autre en conformité avec les principes de la conservation de l'énergie et de l'impulsion.

Une autre question se pose: de quelle masse s'agit-il lorsqu'on parle de la masse au repos nulle? Il faut, en principe, distinguer la masse d'inertie de la masse d'attraction d'un corps. La masse du principe fondamental de Newton (qui est en liaison directe avec le principe d'inertie) s'appelle *masse d'inertie*. Elle détermine l'accélération d'un corps donné soumis à l'action d'une force. C'est aussi à Newton qu'on doit la loi d'attraction universelle. Celle-ci établit l'expression pour la force de gravitation qui s'exerce entre deux corps: deux corps de masses m_1 et m_2 et distants de r qui dépasse de beaucoup les dimensions des corps s'attirent avec la force définie par la formule écrite à gauche (G est la constante de la gravitation universelle):

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad ma = F.$$

A droite, nous avons écrit le principe fondamental de Newton. Nous nous sommes familiarisés avec ce que la même masse entre dans les deux lois au point que la mise en question de l'identité de ces masses paraît un peu déplacée. Or, il s'agit des phénomènes qui, de prime abord, ne sont point liés entre eux. L'attraction et l'inertie pourraient être définies par diverses constantes caractérisant les corps matériels. Mais cela ne s'est pas confirmé. A la fin du XIXe siècle, Eötvös effectua des expériences reprises en 1961 avec une précision plus élevée par Dicke et, enfin, avec une précision encore plus poussée, par V. Braguinski, qui montrèrent que la *masse d'attraction* est proportionnelle à la masse d'inertie ou même égale à cette dernière pour un certain choix des unités. Cette circons-

tance témoigne des liens étroits entre les lois de la dynamique (propriétés d'inertie) et les phénomènes d'attraction.

Quelle masse confère-t-on au photon par la formule $m_{\text{ph}} = \frac{h\nu}{c^2}$? Il est absurde de parler de la masse d'inertie du photon, car il ne peut être ni accéléré, ni freiné, il se meut dans le vide à la vitesse constante c. Il s'agit peut-être de la masse d'attraction. Sous cette optique on considère parfois la déviation des rayons lumineux dans le champ de corps massifs célestes comme résultat de l'attraction. Mais, lors de l'analyse de ce phénomène du point de vue de la théorie newtonienne, la masse du photon s'élimine tout simplement *). On arrive parfois, par l'entremise de la masse du photon, à obtenir la formule du déplacement vers le rouge des raies spectrales. Voici ces raisonnements. Le déplacement d'un photon de lumière dans un champ de gravitation a pour conséquence le changement de l'énergie potentielle du photon, donc, la réalisation d'un travail. Soient φ_1 et φ_2 les potentiels de deux points rapprochés d'un champ de gravitation et $\mathscr{E}$ l'énergie du photon. Le principe de la conservation de l'énergie donne:

$$d\mathscr{E} = m_{\text{ph}} (\varphi_2 - \varphi_1);$$

comme $\mathscr{E} = h\nu$, $m_{\text{ph}} = \frac{h\nu}{c^2}$, on a

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{1}{c^2} (\varphi_2 - \varphi_1). \tag{3}$$

L'expression (3) représente la *formule du déplacement vers le rouge* des raies spectrales déduite par Einstein. Elle traduit le déplacement vers le rouge des fréquences lumineuses lors du passage de la lumière des régions à faibles potentiels du champ de gravitation aux régions avec les potentiels élevés (rappelons que les potentiels φ sont négatifs dans un champ de gravitation). Mais ce résultat ne justifie nullement l'introduction de la masse du photon. C'est que tous les raisonnements cités revêtent un caractère purement formel. En réalité, la variation de la fréquence du photon est liée au différent écoulement du temps aux points dont les potentiels sont différents. La déduction de la formule (3) se base précisément sur ces faits qui relèvent du domaine d'application de la théorie de la relativité générale, concernant la propagation de la lumière dans les champs de gravitation.

En résumé, disons que toute particule est caractérisée par sa masse au repos. C'est pourquoi, la masse au repos nulle caractérise le photon avec autant de droit que la masse $m_0 = 9 \cdot 10^{-28}$ g le fait

*) Gravitation and relativity. Ed. by Hong-Yee Chin and William F. Hoffmann. New York-Amsterdam, Benjamin, 1964.

pour l'électron. L'introduction de la masse du photon m_{ph} est superflue. Les particules, quelle que soit leur masse au repos, y compris la masse au repos nulle, existent objectivement et représentent une réalité physique.

La transformation mutuelle des particules est régie par certains principes de la conservation (de l'énergie, de l'impulsion et par d'autres lois spécifiques de la transformation mutuelle des particules). Mais il n'existe pas de loi de la conservation de la masse au repos.

58. **« Equivalence » de la masse et de l'énergie.** Dans le chapitre IV, nous avons introduit le quadrivecteur énergie-impulsion (IV, 30) pour un point matériel libre:

$$\vec{P}\left(p,\ \frac{i}{c}\mathscr{E}\right) \tag{4}$$

où $p = m_0\gamma v$. Si dans le référentiel K^0 l'impulsion du point p_0 s'annule, le quadrivecteur $\vec{P}$ devient plus simple: $\vec{P}^0\left(0,\ \frac{i}{c}\mathscr{E}_0\right)$. Conformément aux transformations des quadrivecteurs pour le repère K, on a:

$$p = \Gamma\frac{\mathscr{E}_0}{c^2}V, \quad \mathscr{E} = \Gamma\mathscr{E}_0. \tag{5}$$

Les formules (5) sont analogues aux formules (IV, 39) où l'on a changé les notations et le signe de V. La comparaison de la première formule (5) avec la définition de l'impulsion tridimensionnelle relativiste $p = m_0\Gamma V$ (dans le présent cas $\gamma = \Gamma$) impose:

$$m_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{c^2}. \tag{6}$$

Autrement dit, la masse au repos d'une particule détermine son énergie dans le système de référence propre (là où l'impulsion de la particule est nulle). Il en était déjà question au chapitre IV.

Toutefois ces conséquences ont une portée plus généralisée et peuvent être étendues à un système de corps. On peut affirmer que tout système isolé ayant une énergie $\mathscr{E}_0$ dans son référentiel propre (où l'impulsion résultante $P = \sum p$ est nulle) possède, d'autre part, la masse inerte:

$$M_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{c^2}, \tag{7}$$

où $\mathscr{E}_0$ est l'énergie totale contenue dans le système. Envisageons quelques exemples.

1. Système isolé de n points matériels qui entrent en collisions élastiques (en physique classique, ce modèle correspond au gaz parfait). Désignons par $m_0^{(1)}$, $m_0^{(2)}$, . . ., $m_0^{(n)}$ les masses au repos

des particules et par $\vec{v}_0^{(1)}, \vec{v}_0^{(2)}, \ldots, \vec{v}_0^{(k)}$ leurs quadrivitesses dans le référentiel propre $K^{(0)}$. Passons à un autre repère dont la vitesse relative suit l'axe des x. Les composantes tridimensionnelles des vitesses des points dans K se déterminent selon

$$v_x^{(k)}=\frac{v_{x,0}^{(k)}+V}{1+\frac{v_{x,0}^{(k)}V}{c^2}},\quad v_y^{(k)}=\frac{v_{y,0}^{(k)}\sqrt{1-B^2}}{1+\frac{v_{x,0}^{(k)}V}{c^2}},\quad v_z^{(k)}=\frac{v_{z,0}^{(k)}\sqrt{1-B^2}}{1+\frac{v_{x,0}^{(k)}V}{c^2}}. \tag{8}$$

Servons-nous encore de la formule (III, 17):

$$\sqrt{1-\left(\frac{v^{(k)}}{c}\right)^2}=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{v_0^{(k)}}{c}\right)^2}\sqrt{1-B^2}}{1+\frac{v_{x,0}^{(k)}V}{c^2}}, \tag{9}$$

en l'écrivant sous la forme:

$$\gamma^{(k)}=\Gamma\gamma_0^{(k)}\left(1+\frac{v_{x,0}^{(k)}V}{c^2}\right). \tag{10}$$

L'impulsion résultante du système est la somme des impulsions des particules isolées:

$$\boldsymbol{P}=\sum m_0^{(k)}\gamma^{(k)}\boldsymbol{v}^{(k)},$$

et

$$\boldsymbol{P}_0=\sum m_0^{(k)}\gamma_0^{(k)}\boldsymbol{v}_0^{(k)}=0.$$

Il vient alors:

$$P_x=\sum m_0^{(k)}\gamma^{(k)}v_x^{(k)}=\sum m_0^{(k)}\Gamma\gamma_0^{(k)}(v_{x,0}^{(k)}+V)=$$
$$=\Gamma\sum m_0^{(k)}\gamma_0^{(k)}v_{x,0}^{(k)}+\Gamma\frac{V}{c^2}\sum m_0^{(k)}c^2\gamma_0^{(k)}=\Gamma P_{x,0}+\Gamma\frac{V}{c^2}\mathscr{E}_0=\Gamma\frac{\mathscr{E}_0}{c^2}V.$$

On trouve aisément que $P_y=P_y^{(0)}=0$. En ce qui concerne la transformation de l'énergie, on a

$$\mathscr{E}=\sum m_0^{(k)}c^2\gamma^{(k)}=\sum m_0^{(k)}c^2\Gamma\gamma_0^{(k)}\left(1+\frac{v_{x,0}V}{c^2}\right)=$$
$$=\Gamma\sum m_0^{(k)}c^2\gamma_0^{(k)}=\Gamma\mathscr{E}_0,$$

puisque

$$\sum m_0^{(k)}c^2\Gamma\gamma_0^{(k)}\frac{v_{x,0}V}{c^2}=\Gamma V\sum m_0^{(k)}\gamma_0^{(k)}v_{x,0}=0.$$

Par conséquent, pour le système isolé

$$\boldsymbol{P}=\Gamma\frac{\mathscr{E}_0}{c^2}\boldsymbol{V},\qquad M_0=\frac{\mathscr{E}_0}{c^2},$$

où V est la vitesse du centre d'inertie. Il en vient que la masse inerte du système M_0 est égale à $\frac{\mathscr{E}}{c^2}$. Cependant, au point de vue de la théorie cinétique, une partie de l'énergie $\mathscr{E}$ est représentée par la la chaleur. Ainsi donc, la masse au repos du système comprend non seulement les masses au repos des particules mais aussi leur énergie cinétique sommaire; celle-ci n'est autre, du point de vue macroscopique, que la chaleur. La masse au repos du système tout entier a la forme suivante:

$$M_0 = \sum m_0^{(k)} \gamma^{(k)} = \sum \frac{m_0^{(k)}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_0^{(k)}}{c}\right)^2}}. \tag{11}$$

La masse au repos totale croît donc avec l'augmentation de l'énergie cinétique moyenne de chaque particule.

On s'est limité à la considération du système de particules indépendantes et on a défini $\mathscr{E}_0 = \sum m_0^{(k)} c^2 \gamma_0^{(k)}$ comme somme des énergies totales des particules (totales au sens de la somme de l'énergie au repos et de l'énergie cinétique relativiste). Il est clair que $\mathscr{E}_0$ ainsi défini ne contient pas l'énergie de l'interaction des particules du système. S'il y a l'interaction des particules, l'énergie $\mathscr{E}_0$ doit comprendre également l'énergie de l'interaction des particules (il faut seulement la savoir décrire), c.-à-d. on aura:

$$\mathscr{E}_0 = \sum m_0^{(k)} c^2 \gamma_0^{(k)} + \mathscr{E}_{\text{int}}.$$

2. Considérons le choc mou de deux corps. Tout comme au paragraphe 27, admettons que la masse au repos M_0 d'un corps unique résultant du choc mou ne soit pas égale à la somme des masses au repos $m_0^{(1)}$ et $m_0^{(2)}$ de ces deux corps. Le principe de la conservation de l'énergie-impulsion s'écrit sous la forme quadridimensionnelle:

$$m_0^{(1)} u_i^{(1)} + m_0^{(2)} u_i^{(2)} = M_0 u_i, \tag{12}$$

où u_i est la vitesse d'un corps unique formé au cours du choc. Les premières trois équations (12) pour $i = 1, 2, 3$ permettent de trouver trois composantes de la vitesse du corps unique. La quatrième équation ($i = 4$) se met sous la forme

$$m_0^{(1)} \gamma^{(1)} + m_0^{(2)} \gamma^{(2)} = M_0 \gamma.$$

Dans le système de référence où le corps formé est immobile, on a

$$M_0 = \frac{m_0^{(1)}}{\sqrt{1-\left(\frac{v^{(1)}}{c}\right)^2}} + \frac{m_0^{(2)}}{\sqrt{1-\left(\frac{v^{(2)}}{c}\right)^2}}$$

17—039

et sous forme développée

$$M_0 = \frac{1}{c^2}\{m_0^{(1)}c^2(\gamma^{(1)}-1) + m_0^{(2)}c^2(\gamma^{(2)}-1)\} + m_0^{(1)} + m_0^{(2)}.$$

L'expression de l'accolade est la somme des « énergies cinétiques » relativistes. Il s'ensuit que l'énergie cinétique relativiste s'est transformée en chaleur (ou en d'autres formes de l'énergie) tout en augmentant la masse inerte du système. Ainsi donc, la mécanique relativiste rassemble dans le principe de la conservation de l'énergie non seulement l'énergie mécanique, mais toutes les formes de l'énergie.

3. Envisageons maintenant un corps de masse au repos M_0 qui perd de l'énergie sous forme d'un rayonnement électromagnétique (lumineux). Supposons que le rayonnement soit à symétrie sphérique par rapport au corps émetteur de façon que l'impulsion résultante du rayonnement soit nulle. Admettons que cela se passe dans le référentiel K'. Passons maintenant au repère K. Considérons le cas où le rayonnement est émis au cours d'un intervalle de temps fini. Il en vient que l'impulsion et l'énergie du train d'ondes forment un quadrivecteur (voir le chap. VII). Si l'énergie rayonnée dans K' est égale à $\mathscr{E}_0$, on obtient immédiatement pour l'impulsion de rayonnement dans K:

$$\boldsymbol{p} = \Gamma \frac{\mathscr{E}_0}{c^2} \boldsymbol{V}.$$

Mais l'impulsion du corps n'a pas changé durant l'émission. Le principe de la conservation de l'impulsion ne peut être respecté que s'il y a la variation de la masse au repos du corps. Soient M_0 la masse au repos avant l'émission, M_0' celle après l'émission. Le principe de la conservation de l'impulsion fournit

$$\Gamma M_0 \boldsymbol{V} = \Gamma M_0' \boldsymbol{V} + \Gamma \frac{\mathscr{E}_0}{c^2} \boldsymbol{V},$$

soit 159

$$M_0' = M_0 - \frac{\mathscr{E}_0}{c^2}.$$

Ainsi donc, la masse au repos du corps a diminué de $\frac{\mathscr{E}_0}{c^2}$.

Le résultat obtenu est indépendant de la forme qu'avait l'énergie $\mathscr{E}_0$ avant l'émission.

59. Paradoxe des jumeaux. Deux jumeaux habitent la Terre. Un jour l'un d'eux part faire un tour dans le cosmos. « L'horloge mobile retarde sur l'horloge immobile » (voir page 67). Si le voyageur cosmique retourne sur Terre, il sera plus jeune que son frère, que toute sa génération. Il se trouvera dans le futur! L'un des jumeaux deviendra plus jeune! Voyons de plus près ce qui est paradoxal dans ce voyage.

Peut-on appliquer les conclusions de la Relativité restreinte à des êtres vivants? Tous les processus de la vie sont régis par les principes généraux de la physique et de la chimie, donc il n'y a pas à douter sur légitimité des conclusions de la Relativité restreinte. Il est tout à fait indéniable que tout organisme vivant évolue en son temps propre mesuré d'après une « horloge » rattachée à lui; ce temps est donc celui d'un « processus localisé ».

Imaginons un cosmonaute en mouvement rectiligne et uniforme relativement à la Terre. L'intervalle de temps entre les positions successives (événements) du voyageur cosmique mesuré par l'horloge « terrestre » est supérieur à l'intervalle de son temps propre. Or, il évalue son âge d'après son temps propre. Depuis le bord de son vaisseau il remarque que l'horloge terrestre avance sur la sienne. Peut-on en conclure que le cosmonaute vieillit plus lentement que son jumeau terrestre? S'il en était ainsi, tous les principes de la Relativité restreinte seraient violés. Car, d'après les postulats d'Einstein, tous les systèmes inertiaux sont équivalents et donc indiscernables. La différence d'âge des hommes permettrait de distinguer les systèmes inertiaux. En outre, il est impossible d'admettre que la mesure du temps propre dépend du référentiel inertial. Cela serait aussi incompréhensible que si la fréquence de la lumière émise par deux atomes identiques, situés chacun dans son propre référentiel d'inertie, n'était pas la même pour ces atomes.

Mais qu'est-ce qui est incompréhensible alors? On raisonne habituellement de la façon suivante. Soit un corps au repos dans le repère K'. L'horloge qui se meut avec K' indique les instants t'_1 et t'_2 correspondant à deux événements. L'intervalle $(t'_2 - t'_1)$ est l'intervalle de temps propre qu'il est naturel de désigner par $\Delta\tau$. Les mêmes événements observés dans K sont fixés à l'aide d'une paire d'horloges en deux points distincts de K aux instants t_1 et t_2. L'intervalle de temps entre ces événements sera égal à $\Delta t = t_2 - t_1$. On sait que

$$\Delta\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t, \tag{13}$$

c.-à-d. l'intervalle de temps propre qui sépare les événements est inférieur à celui des mêmes événements fixé dans le système par rapport auquel le corps est en mouvement.

Passons à l'âge des jumeaux. L'astronaute mesure son âge selon son temps propre τ et son jumeau terrestre selon le sien. A l'instant t'_1, l'astronaute voit l'horloge du repère K marquer le temps t_1 et à l'instant t'_2 il voit une autre horloge du même repère marquer le temps t_2. Or, toutes les horloges du système K sont synchronisées. Une horloge indiquant le temps t_2, on voit toutes les autres horloges marquer le même temps t_2. Ainsi, le point où resta le jumeau terrestre correspond également à l'instant t_2. Donc, $(t_2 - t_1)$ est l'intervalle de temps propre du jumeau qui ne quitte pas la Terre.

Et la formule (13) « rajeunit » d'un coup notre voyageur. Où est alors la symétrie des systèmes inertiaux qui est la pierre angulaire de la Relativité restreinte ? Elle est, certes, présente, et il faut rechercher une faute qui s'est introduite dans nos raisonnements. En raison de la relativité de la simultanéité, les horloges synchronisées dans un repère ne le sont point dans tous les autres. La quantité Δt ne représente point l'intervalle de temps propre pour le jumeau terrestre. Faisons le calcul nécessaire.

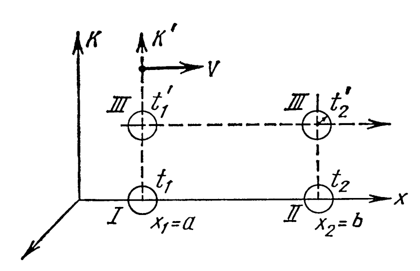


Fig. 36. Illustration de la symétrie totale de deux référentiels d'inertie par rapport au « ralentissement » du temps. Dans tout repère, l'intervalle de temps propre entre un couple d'événements est inférieur à l'intervalle de temps entre les mêmes événements fixés par une paire d'horloges de tout autre repère.

Soit une horloge III immobile à l'origine du référentiel K' qui se déplace avec la vitesse V par rapport à K. L'horloge I, synchronisée dans K, se trouve au point $x_1 = a$ et l'horloge II au point $x_2 = b$. Dans le repère K, l'horloge III a pour coordonnée $x_3 = Vt$. Relevons les coordonnées de toutes les trois horloges dans le repère K:

$$x_1 = a \quad \text{(pour l'horloge I)}, \quad (14)$$

$$x_2 = b \quad \text{(pour l'horloge II)}, \quad (15)$$

$$x_3 = Vt \quad \text{(pour l'horloge III)}. \quad (16)$$

En portant (14) et (15) dans la formule de la transformation de Lorentz $x = \Gamma (x' + Vt')$, on arrive à obtenir pour les horloges I et II leurs coordonnées dans le repère K' en fonction du temps t' du même repère [voir (II, 18)]. En y ajoutant la valeur évidente de la coordonnée pour l'horloge III $x_3' = 0$, on obtient

$$x_1' = -Vt' + \frac{a}{\Gamma} \quad \text{(pour l'horloge I)}, \quad (17)$$

$$x_2' = -Vt' + \frac{b}{\Gamma} \quad \text{(pour l'horloge II)}, \quad (18)$$

$$x_3' = 0 \quad \text{(pour l'horloge III)}. \quad (19)$$

Quelles comparaisons des horloges sont réellement acceptables? Primo, lorsque l'horloge III passe devant l'horloge I, on peut fixer les indications correspondantes des horloges en les désignant par t_1' et t_1 ; secundo, lorsque l'horloge III passe devant l'horloge II ces indications sont désignées par t_2' et t_2 (fig. 36). Si les horloges III et I se confondent, elles se trouvent toutes les deux au point $x' = 0$. Alors, selon (17), on a $t_1' = \frac{a}{V\Gamma}$ et $t_2' = \frac{b}{V\Gamma}$. En même temps il vient de (16) $t_1 = \frac{a}{V}$, $t_2 = \frac{b}{V}$, c.-à-d. $t_1 = \Gamma t_1'$ et $t_2 = \Gamma t_2'$. Les

indications t_1 et t_2 appartiennent à deux horloges différentes mais synchronisées dans le repère K. Selon la règle de la synchronisation lorsque l'horloge II indique le temps t_2, l'horloge I marque le même temps t_2. La différence $(t_2 - t_1)$ décrit le temps écoulé dans K au bout duquel l'indication de l'horloge III varie de $(t'_2 - t'_1)$. Du point de vue du repère K, le rythme de l'horloge III correspond à la relation

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\Gamma}(t_2 - t_1) = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - \mathrm{B}^2}, \tag{20}$$

ce qui est naturel vu que $(t'_2 - t'_1)$ est l'intervalle de temps propre. Comme

$$|t'_2 - t'_1| < |t_2 - t_1|,$$

l'horloge mobile, vue du repère K, retarde. Tout cela est, certes, bien connu. Faisons maintenant un pas décisif : il s'agit de comparer le rythme des horloges I et II de telle façon qu'il soit observé dans K'. Pour le faire, analysons le rythme d'une horloge quelconque, II par exemple. Or, cette horloge ne possède qu'une seule indication directe, celle qui est rattachée au moment où l'horloge en question était en face de l'horloge III et indiquait le temps t_2 tandis que l'horloge III marquait le temps t'_2. Toute autre indication est à calculer. On parvient alors à déterminer le point et l'indication de l'horloge II, correspondant au moment où l'horloge I se trouvait en face de l'horloge III. Envisageons tous les problèmes du point de vue du système K'. Lorsque l'horloge III était en face de l'horloge I, elle indiquait le temps $t'_1 = \frac{a}{V\Gamma}$. L'horloge II était distante de l'horloge I de $x'_2 - x'_1 = \frac{b-a}{\Gamma}$ [voir (17) et (18)]. Mais lorsque l'horloge I était en face de l'horloge III, sa coordonnée fut $x'_1 = x'_3 = 0$. Donc, $x'_2 = \frac{b-a}{\Gamma}$ est la coordonnée de l'horloge II au moment où les horloges I et III coïncident. On parvient alors aisément à trouver l'indication de l'horloge II en ce même moment. Introduisons dans la formule

$$t = \Gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)$$

les expressions $t'_1 = \frac{a}{V\Gamma}$ et $x'_2 = \frac{b-a}{\Gamma}$. Voici l'indication de l'horloge II :

$$t = \Gamma t'_1 + \Gamma\frac{V}{c^2}\frac{b-a}{\Gamma} = t_1 + \frac{V}{c^2}(b-a). \tag{21}$$

Si les horloges I et II avaient été synchronisées, elles auraient indiqué le même temps. Elles ne le sont pourtant que dans K. Alors, du point de vue de K', les horloges de K ne sont plus synchrones,

la différence d'indications

$$\delta = \frac{V}{c^2}(b-a)$$

s'accroît à mesure de l'éloignement respectif des horloges. Le même résultat est déjà obtenu dans le paragraphe 15. Comme dans le repère K on a $b - a = V(t_2 - t_1)$, l'indication de l'horloge II s'écrira $t = t_1 + \frac{V}{c^2}(t_2 - t_1)$. En composant la différence du temps fixé t_2 et du temps calculé t, on aura

$$t_2 - t = (t_2 - t_1)\frac{1}{\Gamma^2}$$

ou, conformément à (20),

$$t_2 - t = (t'_2 - t'_1)\frac{1}{\Gamma}.$$

Cela signifie au juste que l'observateur du référentiel K' découvrira le retardement d'une horloge qui se déplace par rapport à lui. Ainsi, la symétrie totale des systèmes est démontrée.

En principe, au sein des systèmes inertiaux, les gens qui se déplacent d'un mouvement relatif rectiligne et uniforme ne se rencontrent qu'une seule fois (pour un instant) pour se quitter à jamais. Ils n'auront plus de possibilité de comparer leurs âges. Pour se voir encore une fois, il leur faut, soit s'arrêter et changer la vitesse pour la contraire, soit se déplacer suivant une courbe fermée. Ces deux possibilités signifient le passage aux systèmes non inertiaux, mais alors toute la conception du monde est changée. Dans le cadre des systèmes non inertiaux, le voyageur peut revenir sur Terre moins vieilli que ses compatriotes. En principe le voyage dans l'avenir est possible. Mais ici il n'y a pas réellement de paradoxe. Primo, de quel avenir s'agit-il? Tout organisme a son présent et son passé. Bien sûr, le voyage ni dans son passé ni dans son avenir n'est pas réalisable. Quand, après un tour dans le cosmos, vous retrouvez vos amis, c'est vous qui êtes le plus jeune. Donc, il s'agit plutôt du voyage dans le futur de ces gens. Secundo, est-il possible de retourner notre raisonnement et « rajeunir » ceux qui restent sur Terre? Non, car le repère où reposent vos amis et celui des astronautes ne sont pas équivalents. Celui qui suivait dans son mouvement une courbe fermée ou changeait la direction de mouvement en subissant l'accélération ne vit plus dans le système inertial. Selon la théorie de la relativité générale, cela signifie que les voyageurs subirent une action supplémentaire de la pesanteur. Il en est autrement pour ceux qui restent sur Terre. La Relativité générale affirme aussi qu'un couple d'horloges identiques placées dans le champ de gravitation ne sont plus synchrones si elles se trouvent aux points où l'intensité du champ n'est pas la même. Plus le champ de gravitation est intense, plus le rythme de l'horloge y est lent. Une horloge après l'accélération subit donc l'action gravitationnelle plus intense que celle immobile dans un système d'inertie.

Cela explique le « ralentissement » du temps. Le problème sur le corps animé d'un mouvement uniformément accéléré en est une bonne illustration (voir le paragraphe 30).

Enfin, est-ce que ce voyage dans l'avenir est compatible avec nos conceptions philosophiques? Pleinement, quelque extraordinaire et paradoxal qu'il paraisse. Ce qui compte, c'est qu'il n'est point possible d'atteindre le passé pour influencer les causes des effets déjà accomplis. Vous ne pouvez pas trouver, dans le passé, votre jeune grand-père et le persuader de ne pas épouser votre grand-mère. Une telle possibilité n'est pas prévue par la Relativité, et le fait de la probabilité théorique du voyage dans l'avenir ne contredit pas nos conceptions philosophiques.

60. Sur la vitesse de transmission du signal. Le mot « paradoxe » a encore une signification. On entend par paradoxe une opinion inattendue qui semble improbable au premier abord mais qui est vraie dans une certaine mesure. Il y a des phénomènes qui paraissent contredire les concepts fondamentaux de la Relativité restreinte. Leur analyse est très utile. Il n'est pas de trop de rappeler que, depuis la parution de la Relativité restreinte, ses conceptions fondamentales sont sujettes à des attaques acharnées (bien que, de nos jours, celles-ci deviennent moins nombreuses). Maints paradoxes ont été avancés pour démontrer l'insuffisance de la Relativité restreinte. Mais peu à peu avec le temps tous les paradoxes trouvèrent leurs explications et la Relativité restreinte, confirmée par l'expérience et le temps, se montra comme une théorie cohérente et non contradictoire.

Nous commençons par le problème de la vitesse de transmission du signal ou de l'information. Le point de départ de la Relativité restreinte consiste en affirmation que la vitesse de la lumière dans le vide est la vitesse maximale de la transmission du signal. Pourrait-on trouver dans la nature une vitesse qui la dépasserait?

Le premier exemple est tout prêt. Poussons une tringle absolument rigide. Ses deux extrémités se mettent en marche simultanément et le signal est transmis instantanément. Mais la faute réside dans l'énoncé. La nature ne connaît pas de corps absolument rigides. Tous les corps sont plus ou moins élastiques. Il en vient que le signal se propage d'un point du corps à un autre comme une onde élastique. La vitesse de cette dernière est dérisoire par rapport à celle de la lumière. Ainsi donc, la Relativité restreinte souligne qu'il n'existe pas dans la nature de corps absolument rigides.

Pourrait-on alors obtenir quelque vitesse surpassant celle de la lumière et apte encore à servir de propagateur de l'information? Rappelons à cet égard que la Relativité restreinte ne pose pas de limites à la vitesse en général mais qu'elle n'admet pas seulement la transmission du signal à la vitesse supérieure à celle de la lumière.

Cela implique bien sûr l'impossibilité de mouvement des corps matériels à la vitesse égale ou supérieure à c. Mais les êtres géométriques, les constructions artificielles physiques peuvent, bien entendu, se déplacer à la vitesse supérieure à c.

Envisageons une droite AB orientée sous un angle ϑ par rapport à l'axe des x et qui est en translation rectiligne avec la vitesse V (fig. 37). Si, pendant l'intervalle dt, la droite couvre la distance $V\ dt$ le long de la direction de la translation, le déplacement du point d'intersection de la droite avec l'axe des x, i.e. le segment CC', est égal à $\frac{Vdt}{\sin\vartheta}$ et, en unité de temps, à $\frac{V}{\sin\vartheta}$. On peut considérer deux tiges inclinées sous un même angle par rapport à l'axe des x et se déplaçant avec une même vitesse dans les directions indiquées sur la figure 37. Dans ce cas, leur point d'intersection se déplacera à droite avec la vitesse $\frac{V}{\sin\vartheta}$. Choisissant V assez grande ($V < c$) et l'angle ϑ assez petit, on peut obtenir la vitesse du point d'intersection des droites supérieure à c. Mais cela ne contredit pas la théorie relativiste. D'une part, le point d'intersection des tiges n'est pas un corps matériel. D'autre part, ce point ne peut pas servir d'agent propagateur du signal, car il coïncide à chaque instant donné avec de nouveaux points formés sur les deux tiges (on ne peut pas « marquer » le point d'intersection).

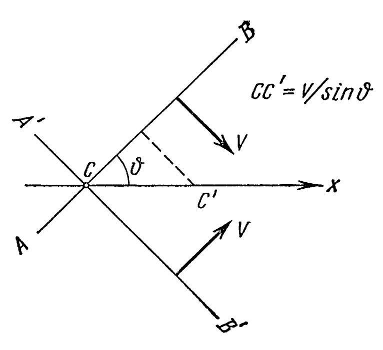


Fig. 37. Le point d'intersection de deux tiges peut se déplacer à la vitesse supérieure à celle de la lumière dans le vide c. Cependant, cette vitesse n'est liée à aucun signal et, par conséquent, il n'y a pas de contradiction avec les conceptions fondamentales de la Relativité restreinte.

Et la rotation relativement lente d'un solide de grand rayon, pourrait-elle engendrer les vitesses supérieures à celle de la lumière? La réponse y est négative. La dynamique des parcelles est définie par leurs vitesses linéaires. Plus ces parcelles sont éloignées de l'axe de rotation, plus leurs vitesses sont grandes, plus le moment d'inertie est grand et plus l'accélération angulaire est petite. La vitesse linéaire des points les plus éloignés ne dépasse pas non plus la vitesse c. Si la rotation d'un solide n'apporte pas de satisfaction, on peut essayer de faire tourner un rayon lumineux. Voici un schéma tout simple. Le rayon de lumière provenant de la source I tombe sur un miroir à plusieurs faces, tournant à la vitesse angulaire ω. En fonction de la vitesse ω et de la distance de l'écran, on peut obtenir un mouvement d'un « spot » lumineux (image de la source) à la

vitesse linéaire surpassant c. Mais cette vitesse n'est pas utilisable pour la transmission d'un signal (d'une information). C'est que chaque point de l'écran reçoit une nouvelle portion de l'énergie de la lumière renvoyée par le miroir et non par le point voisin de l'écran. Voilà pourquoi, la transmission d'une information d'un point de l'écran à un autre est impossible. On peut le montrer sur l'exemple suivant. Soit un miroir ellipsoïdal avec un miroir tournant dans un de ses foyers (fig. 38). Le rayon réfléchi sur le miroir passe toujours par le second foyer où on place un récepteur. Le spot qui se déplace sur le miroir représente une image de la source. Si le spot avait été une source mobile, on aurait observé, dans le second foyer, l'effet Doppler. On ne décèle rien de semblable, car le temps que met la lumière pour parcourir la distance du miroir tournant au récepteur est toujours le même.

Fig. 38. Le « spot » réfléchi sur le miroir tournant se déplace sur l'écran éloigné avec la vitesse supérieure à c. Pourtant, il ne transmet pas de signal.

La vitesse de phase d'ondes électromagnétiques dans un milieu peut dépasser c. La vitesse de phase des ondes dans un milieu v se définit au moyen de la vitesse c et de l'indice absolu du milieu d'après la formule $v = \frac{c}{n}$. Il y a des cas où $n < 1$ et, par conséquent, $v > c$. Il va de soi que de tels cas se rapportent au milieu et aux fréquences déterminées des ondes électromagnétiques. Citons, à cet effet, le cas des rayons X durs pour lesquels $n < 1$ dans maints milieux. Cela s'observe également dans le domaine de la dispersion anomale de la lumière, dans le plasma. Tous ces effets ne contredisent point la Relativité restreinte. Celle-ci limite rigoureusement la vitesse de la transmission d'un signal, mais cette vitesse n'est pas définie par la vitesse de phase. Dans un milieu de dispersion, c.-à-d. dans le milieu où l indice absolu dépend de la fréquence de la lumière, un signal peut être envoyé au moyen des ondes électromagnétiques, dont la bande de fréquence est assez étroite (un groupe d'ondes). La vitesse du signal est la vitesse de transmission de l'énergie par ce groupe; comme le montre une étude détaillée (voir la bibliographie) la vitesse de la transmission de l'énergie (« amplitude de groupe ») est définie par la vitesse de groupe. Mais celle-ci est toujours inférieure à c, sauf le cas de la dispersion anomale où formellement la vitesse de groupe surpasse c. Toutefois la notion de vitesse de groupe, ainsi que celle de vitesse du signal, y perdent leurs significations. En résumé disons que les processus ondulatoires ne permettent de transmettre le signal qu'avec une vitesse inférieure à c.

61. Paradoxe du levier. Ce paradoxe surgit lors de l'application des relations relativistes aux conditions d'équilibre d'un levier usuel. Au premier coup d'œil, les conclusions paraissent bien étranges.

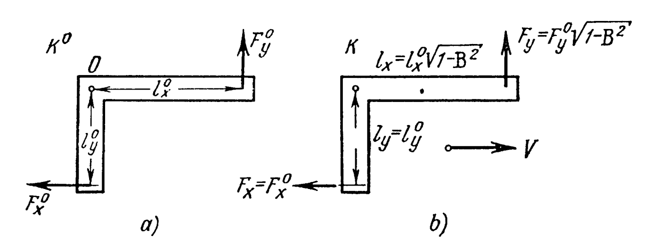


Fig. 39. Paradoxe du levier. Si dans le repère K^0 le levier est en équilibre, le moment résultant des forces est nul; le même levier, observé depuis le repère K, est soumis à un moment de forces différent de zéro, comme il vient des formules de la transformation des longueurs et des forces. La Relativité restreinte explique de façon élégante pourquoi le levier est également au repos du point de vue de repère K (voir le texte).

Mais une analyse approfondie nous conduit à les considérer comme vraies et ayant une explication digne de foi. En quoi consiste donc ce paradoxe?

Un levier en équilibre est au repos dans le système K^0. Son équilibre est assuré par l'égalité des moments dans K^0 de deux forces F_x^0 et F_y^0 dirigées chacune suivant l'axe correspondant:

$$F_x^0 l_y^0 = F_y^0 l_x^0; \tag{22}$$

les moments des forces F_x^0 et F_y^0 sont opposés (fig. 39).

Le même levier peut être observé depuis le repère K, par rapport auquel le levier, considéré comme un tout, se meut avec la vitesse V. En composant les expressions du moment de la force F_x et de celui de la force F_y en K nous découvrons qu'ils ne sont plus égaux et, par conséquent, un moment résultant agissant sur le levier diffère de zéro. En effet, conformément aux formules de la transformation des longueurs (III, 1) et des forces (IV, 38)

$$F_x = F_x^0, \quad F_y = F_y^0\sqrt{1-B^2},$$
$$l_x = l_x^0\sqrt{1-B^2}, \quad l_y = l_y^0.$$

La différence des moments des forces F_x et F_y crée dans le repère K le moment de rotation:

$$L = F_x l_y - F_y l_x = F_x^0 l_y^0 - (1-B^2) F_y^0 l_x^0 = B^2 F_y^0 l_x^0 = -B^2 F_x l_y, \tag{23}$$

où l'on a utilisé (22). Certes, il aurait été bien étrange de voir le levier se mettre en mouvement à cause du changement de position de l'observateur. Mais la Relativité restreinte ne l'affirme point.

Donnons d'abord une explication élémentaire. On s'attend d'habitude à ce que le moment d'une force provoque une rotation en augmentant par cela l'impulsion angulaire du système. Dans ce cas, le moment d'une force décrit réellement le taux d'accroissement de l'impulsion angulaire bien que cet accroissement ne soit aucunement lié à la rotation du levier. D'où vient tout de même l'accroissement de l'impulsion angulaire? Examinons le travail des forces F_x et F_y dans le système K. Le levier y est en mouvement et la force F_x produit en une unité de temps le travail $-F_xV$. La force F_y ne fait pas de travail, car elle est normale à la vitesse du levier. Par conséquent, le travail est accompli à l'extrémité du levier, là, où est appliquée la force F_x, et l'énergie du levier à ce point augmente en une unité de temps de valeur $-F_xV$. Cela veut dire qu'au point d'application de la force la masse du levier s'accroît, en une unité de temps, de $-\frac{F_xV}{c^2}$. Le produit de cette grandeur par la vitesse du levier V donne l'accroissement de l'impulsion égal à $-F_x\mathrm{B}^2$. L'impulsion angulaire augmente, en une unité de temps, de $-F_xl_y\mathrm{B}^2$, ce qui représente justement le moment complémentaire (23). Ainsi, le moment complémentaire définit non pas la rotation mais le taux d'accroissement de l'impulsion angulaire du système. Le cas considéré est analogue à celui examiné au chapitre VI où l'accroissement de l'impulsion était dû au transfert réversible de la chaleur sans avoir rapport à l'action des forces ou à l'accomplissement du travail.

Pourtant, l'explication ci-dessus n'est pas stricte. La Relativité restreinte ne prévoit pas de corps absolument rigides et on est contraint de tenir compte de la déformation du levier; dans le raisonnement précédent on a tacitement supposé que le levier ne changeait pas de forme. Dans le système K^0 on doit envisager les bras du levier courbés sous l'action des forces F_x^0 et F_y^0. Les forces du système K^0 qui agissent à l'intérieur du levier (contraintes ou tensions) et la densité d'énergie du levier forment un tenseur énergie-impulsion [comp. avec (VI, 8)] dont la quatrième colonne et la quatrième ligne ont une seule composante T_{44}^0 non nulle (égale à la densité d'énergie). Du point de vue de K, la forme T_{ik} s'obtient conformément à (VI, 9). Les composantes spatiales du tenseur y changent leur forme, donc les tensions dans les bras du levier varient elles aussi. La variation de la tension compense le moment de forces (23). En principe, le problème est résolvable, car la flexion de la barre fixée à une extrémité peut être déterminée. Pourtant, le calcul n'en est pas simple. La solution du problème consiste en ce que le moment de forces élastiques compense le moment (23). On connaît bien que le flux d'impulsion et l'action de la force sont les notions équivalentes.

CONCLUSION

La théorie de la Relativité restreinte est née en 1905, il y a près de soixante-dix ans. Il est possible que les conceptions relativistes de l'espace et du temps et la théorie relativiste elle-même aient pu apparaître plus tôt. On aurait été alors en mesure d'expliquer les expériences optiques sur les corps en mouvement (aberration, expérience de Fizeau, effet Doppler), d'achever l'électrodynamique des milieux en mouvement, mais les conséquences les plus importantes ayant trait à la mécanique seraient restées à l'ombre.

La Relativité restreinte entre en scène là, où il s'agit des vitesses comparables à celle de la lumière et des énergies voisines de celle au repos. Les discordances de la mécanique newtonienne ne se firent sentir que quelques années avant la parution de l'œuvre d'Einstein en 1905. Citons, entre autres, les travaux de Kaufmann (1902) sur la déviation des électrons rapides (dons les vitesses s'approchent de celle de la lumière) dans des champs électrique et magnétique. Ces expériences, à leur tour, ne furent possibles que grâce aux découvertes des rayons X (1896) et de l'électron (1894-1896).

Trois ans après, Einstein énonça le principe de la dynamique pour les particules rapides sous forme quadridimensionnelle correcte. Les conclusions qui en découlaient furent frappantes. Elles affirmaient qu'aux vitesses relativistes le principe fondamental newtonien n'est plus valable. Fut trouvé également le principe fondamental de la conservation de l'ensemble masse-énergie. Il en découlait que tout corps immobile caractérisé par une masse au repos finie possède une énergie gigantesque qui est l'énergie au repos.

La physique contemporaine se développe à un rythme accéléré et les confirmations des conséquences de la mécanique relativiste n'ont pas tardé à se faire signaler. L'argument le plus dramatique en faveur du principe relativiste, reliant la masse et l'énergie, fut l'invention de la bombe et du réacteur atomiques. La mécanique relativiste est depuis longtemps une science des ingénieurs. Ses principes sont à la base de tout calcul des accélérateurs des particules élémentaires. Les relations relativistes sont d'un grand secours dans les descriptions de la diffusion et de la transformation des microparticules.

Le rôle important que joue la théorie de la relativité restreinte est conditionné non seulement par sa contribution à la physique mais aussi par l'influence capitale sur notre conception du monde.

La Relativité restreinte a permis de faire encore un pas vers la compréhension de l'espace et du temps. Newton, tout en admettant l'objectivité de l'espace et du temps, les croyait exister indépendamment l'un de l'autre, plus est, indépendamment de la matière et de son mouvement. Conformément à ses conceptions, le temps et l'espace absolus sont les firmaments de la science. Les phénomènes physiques ont lieu dans l'espace comme s'il était une caisse vide.

Les concepts de la Relativité restreinte de l'espace et du temps représentent, par rapport aux idées de Newton, un pas vers les fondements du matérialisme dialectique. D'après le matérialisme dialectique, le temps et l'espace sont les formes d'existence de la matière. Comme la propriété principale de la matière est le mouvement, alors celui-ci est donc l'entité du temps et de l'espace. En Relativité restreinte le temps dépend du mouvement le plus simple (mécanique). L'espace et le temps sont interdépendants et fusionnent en formant un « univers » quadridimensionnel. Le pas suivant qui est logique selon le matérialisme dialectique est fait par la théorie de la relativité généralisée qui établit la relation entre les propriétés de l'espace, du temps et la distribution de la matière. Ainsi donc, l'évolution des idées de l'espace et du temps en physique est en accord avec les principes généraux du matérialisme dialectique qui est à la base de notre conception du monde.

La Relativité restreinte a été précisément le point de départ de l'évolution de nos conceptions de l'espace et du temps. Cette évolution est étroitement liée à la théorie de la gravitation. Dès le début, on a imposé une restriction à la théorie de la relativité restreinte, d'où provient son appellation. Rigoureusement parlant, cette restriction consiste en ce que la Relativité restreinte n'est valable qu'en l'absence des champs de gravitation. La théorie de la gravitation (la relativité générale) fut élaborée également par A. Einstein (1916), mais son exposé dépasse le cadre du présent ouvrage.

FORMULES PRINCIPALES UTILISÉES DANS CE LIVRE

Transformations de Lorentz sous forme quadridimensionnelle (complexe) :

$$x_i = \alpha_{ik} x'_k, \tag{II,22}$$

$$x'_i = \alpha_{ki} x_k. \tag{II,25}$$

Matrice de Lorentz :

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -i\mathrm{B}\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\mathrm{B}\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}, \tag{II,24}$$

où $\Gamma = (1-\mathrm{B}^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \mathrm{B} = \frac{V}{c}.$ (II,7)

Transformations de Lorentz sous forme réelle :

$$\left.\begin{aligned} x' &= \Gamma\,(x - Vt), & x &= \Gamma\,(x' + Vt'), \\ t' &= \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}\,x\right), & t &= \Gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}\,x'\right). \end{aligned}\right\} \tag{II,17}$$

Formules de transformation des vitesses :

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}\,v'_x}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}\,v'_x}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}\,v'_x}. \tag{III,6}$$

Définition des principaux quadrivecteurs mécaniques :

Quadrivitesse d'une particule $\vec{V}(\gamma v,\ ic\gamma)$ et $\vec{V}^2 = -c^2$. (IV,5)

Quadriimpulsion d'une particule $\vec{P}\left(m_0\gamma v,\ \frac{i}{c}\,\mathscr{E}\right)$ où $\mathscr{E} = m_0 c^2 \gamma$. (IV,30)

$$\text{Quadriforce } \vec{F}\left(\gamma \boldsymbol{F},\ \frac{i\gamma}{c}(\boldsymbol{F}v)\right) \equiv \left(\gamma \boldsymbol{F},\ \frac{i}{c}\,\gamma\dot{\mathscr{E}}\right). \tag{IV,31}$$

Equation de la dynamique relativiste :

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma v) = \boldsymbol{F}, \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{IV,43}$$

$$\text{Quadricourant } \vec{s}\,(\boldsymbol{j},\ ic\rho). \tag{V,6}$$

$$\text{Quadripotentiel } \vec{\Phi}\left(\boldsymbol{A},\ \frac{i}{c}\,\varphi\right). \tag{V,7}$$

Formules de transformation des champs moyens $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$:

$$\begin{aligned} &E_x = E'_x, \quad E_y = \Gamma\,(E'_y + VB'_z), \quad E_z = \Gamma\,(E'_z - VB'_y), \\ &B_x = B'_x, \quad B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2}\,E'_z\right), \quad B_z = \Gamma\left(B_z + \frac{V}{c^2}\,E'_y\right). \end{aligned} \tag{V,36}$$

APPENDICE

L'appendice contient quelques renseignements mathématiques nécessaires pour la lecture du présent ouvrage ; ils sont assez hétérogènes mais relativement simples. On a besoin à la fois du système de notations symétriques, des règles de sommation, des formules de transformation des coordonnées pour la déduction de la transformation de Lorentz. Les tenseurs seront utiles surtout pour l'étude des sujets des chapitres V et VII.

Signalons que la simplicité relative des résultats est due à l'utilisation du système de coordonnées cartésiennes.

1. Notations symétriques, règles de sommation. Si l'on introduit un système de coordonnées cartésiennes dans l'espace tridimensionnel les vecteurs unitaires, portés par les axes x, y, z, sont alors désignés par $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ respectivement. Tout point est alors fixé dans l'espace par le rayon vecteur :

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

qui a pour composantes les coordonnées du point. Toutes les directions dans l'espace étant équivalentes, il semble plus rationnel d'introduire, pour les coordonnées et les vecteurs unitaires de base, les notations symétriques :

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \quad \text{au lieu de } x,\ y,\ z,$$

$$\text{et} \quad \boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2,\ \boldsymbol{m}_3 \text{ au lieu de } \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}.$$

Alors le rayon vecteur d'un point s'écrira :

$$\boldsymbol{r} \equiv x_1\boldsymbol{m}_1 + x_2\boldsymbol{m}_2 + x_3\boldsymbol{m}_3 = \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha \boldsymbol{m}_\alpha, \qquad (1)$$

où l'on a introduit le signe somme $\sum$, et la sommation se fait sur l'indice α prenant les valeurs de 1 à 3. Le signe somme peut être omis, si l'on convient une fois pour toutes de sous-entendre la sommation de 1 à 3 sur deux indices grecs identiques figurant dans un des membres de l'égalité.

La Relativité restreinte opère dans un espace quadridimensionnel (fictif) à quatre coordonnées $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$. Par conséquent, le rayon vecteur et d'autres vecteurs seront caractérisés par quatre composantes. Dans ce cas la règle de sommation reste valable mais la sommation se fait sur les indices latins parcourant toutes les valeurs de 1 à 4. Par exemple

$$A_iB_i \equiv \sum_{i=1}^{4} A_iB_i = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4.$$

Ainsi donc, l'écriture abrégée de la sommation veut dire que celle-ci s'effectue sur deux indices identiques figurant dans un des membres de l'égalité, les indices grecs entendant la sommation de 1 à 3 et ceux latins de 1 à 4.

Revenons au cas tridimensionnel. Le rayon vecteur (1) s'écrira sous forme abrégée :

$$\boldsymbol{r} = x_\alpha \boldsymbol{m}_\alpha$$

et les vecteurs quelconques $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ se présenteront comme suit:

$$\boldsymbol{a} = a_\alpha \boldsymbol{m}_\alpha = a_\beta \boldsymbol{m}_\beta = a_\gamma \boldsymbol{m}_\gamma,$$

$$\boldsymbol{b} = b_\alpha \boldsymbol{m}_\alpha = b_\beta \boldsymbol{m}_\beta = b_\gamma \boldsymbol{m}_\gamma.$$

On a écrit la même égalité sous plusieurs notations afin de montrer que les indices de sommation sont « muets », c.-à-d. que la sommation s'effectue sur tout indice sans altérer le résultat.

A titre d'exemple de l'écriture abrégée de la sommation donnons la déduction de la formule du produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$. Premièrement,

$$\boldsymbol{ab} = a_\alpha \boldsymbol{m}_\alpha b_\beta \boldsymbol{m}_\beta = a_\alpha b_\beta \boldsymbol{m}_\alpha \boldsymbol{m}_\beta. \tag{2}$$

On y a tenu compte de ce que la sommation se faisait sur deux indices; l'expression (2) présente deux sommations, dont chacune s'effectue sur sa propre lettre. Deuxièmement, les vecteurs unitaires sont orthogonaux; c'est pourquoi le produit du vecteur par lui-même fournit l'unité et par tout autre vecteur zéro. Donc,

$$\boldsymbol{m}_\alpha \boldsymbol{m}_\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{3}$$

Il semble avantageux de se servir du symbole de Kronecker possédant les mêmes propriétés:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{4}$$

Ce symbole ne diffère de zéro que pour $\alpha = \beta$, ce qui simplifie la sommation:

$$a_\alpha \delta_{\alpha\beta} = a_\beta.$$

En effet,

$$a_\alpha \delta_{1\alpha} = a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} = a_1.$$

Maintenant, il est facile d'obtenir le résultat définitif dans (2):

$$\boldsymbol{ab} = a_\alpha b_\beta \boldsymbol{m}_\alpha \boldsymbol{m}_\beta = a_\alpha b_\beta \delta_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\alpha,$$

c.-à-d. la forme usuelle du produit scalaire de vecteurs.

Les mêmes indices peuvent affecter les sommations tant au numérateur qu'au dénominateur d'une fraction. La règle de sommation demeure toujours la même. Voici, par exemple, les expressions du gradient de la fonction f et de la divergence du vecteur $\boldsymbol{a}$:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \boldsymbol{m}_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_1} \boldsymbol{m}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \boldsymbol{m}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \boldsymbol{m}_3 = \frac{\partial f}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{k},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Si l'indice grec (ou latin) est seul, cela signifie qu'il est « libre » et peut prendre toute valeur des trois (ou quatre) possibles. La notation b_α, par exemple, peut traduire l'une des coordonnées du vecteur $\boldsymbol{b}$, à savoir b_1, b_2 ou b_3.

2. Transformation des coordonnées par la rotation du système de coordonnées cartésiennes. Supposons que dans l'ancien système de coordonnées le rayon vecteur du point M se présente sous la forme

$$\boldsymbol{r} = x_\alpha \boldsymbol{m}_\alpha.$$

Après la rotation du système de coordonnées, le rayon vecteur du même point M s'écrira dans le nouveau système de coordonnées sous la forme

$$\boldsymbol{r} = x'_\beta \boldsymbol{m}'_\beta,$$

où x'_β sont les coordonnées du point dans le système ayant subi la rotation, $\boldsymbol{m}'_\beta$ nouveaux vecteurs de base. On établit aisément les relations entre les coordonnées dans l'ancien et le nouveau système. Ecrivons l'égalité traduisant la « conservation » du vecteur $\boldsymbol{r}$:

$$x_\alpha \boldsymbol{m}_\alpha = x'_\beta \boldsymbol{m}'_\beta,$$

et multiplions les deux membres par $\boldsymbol{m}'_\gamma$ (un vecteur de base quelconque du nouveau système). On a pour la premier membre:

$$x_\alpha \boldsymbol{m}_\alpha \boldsymbol{m}'_\gamma = x_\alpha a_{\alpha\gamma},$$

où on a introduit la notation $\boldsymbol{m}_\alpha \boldsymbol{m}'_\gamma = \cos(\widehat{\boldsymbol{m}_\alpha, \boldsymbol{m}'_\gamma}) = a_{\alpha\gamma}$; ainsi, $a_{\alpha\gamma}$ représente le cosinus de l'angle entre $\alpha^{\text{ième}}$ vecteur unitaire de base de l'ancien système et $\gamma^{\text{ième}}$ vecteur du nouveau système. Pour le deuxième membre on a une suite d'égalités

$$x'_\beta \boldsymbol{m}'_\beta \boldsymbol{m}'_\gamma = x'_\beta \delta_{\beta\gamma} = x'_\gamma.$$

Ainsi donc,

$$x'_\gamma = a_{\alpha\gamma} x_\alpha \qquad (\gamma = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Les nouvelles coordonnées sont les fonctions linéaires des anciennes, les coefficients de la transformation linéaire étant les cosinus des angles entre les axes de l'ancien et du nouveau système de coordonnées. Il nous reste à trouver les coefficients de la décomposition des anciens vecteurs de base suivant les nouveaux vecteurs. Ecrivons les projections de l'ancien vecteur $\boldsymbol{m}_\gamma$ sur les nouveaux vecteurs:

$$\boldsymbol{m}_\alpha = a^*_{\alpha\mu} \boldsymbol{m}'_\mu, \tag{6}$$

où $a^*_{\alpha\mu}$ sont les coefficients inconnus. Pour les déterminer, multiplions les deux membres de cette égalité par $\boldsymbol{m}'_\gamma$. De façon analogue

$$a_{\alpha\gamma} = a^*_{\alpha\mu} \delta_{\mu\gamma} = a^*_{\alpha\gamma}. \tag{7}$$

On obtient le résultat évident: dans les projections du vecteur unitaire $\boldsymbol{m}_\alpha$ sur les nouveaux vecteurs de base entrent comme coefficients les cosinus $a_{\alpha\gamma}$.

En comparant (5) et (7), nous constatons que les coordonnées, aussi bien que les vecteurs de base, se transforment selon la même loi. Les cosinus des angles entre les anciens et nouveaux vecteurs forment une matrice:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \tag{8}$$

dans la notation $a_{\alpha\beta}$, le premier indice α indique la ligne, le deuxième β la colonne de la matrice (8). La transformation des coordonnées est donc définie par neuf coefficients $a_{\alpha\beta}$. Il est connu pourtant que la position de tout solide (système de coordonnées dans le cas présent), dont un point est immobile, peut être donnée par trois paramètres (trois angles d'Euler). Il s'ensuit que parmi les coefficients $a_{\alpha\beta}$ il n'y a que trois coefficients indépendants. Il n'est pas difficile de trouver les relations nécessaires entre les coefficients $a_{\alpha\beta}$. En effet, la rotation du système de coordonnées n'influe pas sur la distance de tout point qui le sépare de l'origine:

$$r^2 = x^2_\beta = x'^2_\alpha.$$

Mais

$$x'_\alpha = a_{\beta\alpha} x'_\beta.$$

Pour élever cette expression au carré, il faut former le produit des sommes dont les indices de sommation devraient être différents:

$$x'^2_\alpha = x'_\alpha x'_\alpha = a_{\beta\alpha} x_\beta a_{\gamma\alpha} x_\gamma = a_{\beta\alpha} a_{\gamma\alpha} x_\beta x_\gamma.$$

Mais, d'autre part, cette expression est égale à x^2_β. Cela ne peut avoir lieu qu'au cas où

$$a_{\beta\alpha} a_{\gamma\alpha} = \delta_{\beta\gamma} \quad (\beta, \gamma = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Au premier coup d'œil, il y en a neuf conditions, mais ces égalités ne changent pas par la permutation des indices β et γ. Il en vient qu'il y a six égalités indépendantes. Chacune d'elles représente le produit de $\beta^{\text{ième}}$ ligne de la matrice (8) par $\gamma^{\text{ième}}$ ligne. (Le produit des lignes matricielles est une somme des produits

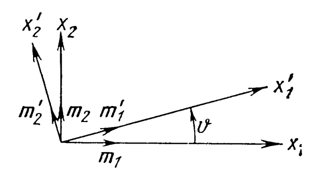


Fig. 40. Illustration des formules générales de la transformation des coordonnées sur l'exemple de la rotation du système cartésien dans le plan. Cette rotation est définie par un seul paramètre ϑ. Le schéma met en évidence les angles entre les nouveaux et les anciens vecteurs de base. Les formules obtenues coïncident avec celles de la géométrie analytique, se rapportant à la transformation des coordonnées:

$$x' = x \cos\vartheta + y \sin\vartheta,$$
$$y' = -x \sin\vartheta + y \cos\vartheta.$$

des éléments correspondants.) L'égalité (9) énonce que le produit de toute ligne par elle-même est égal à l'unité et par toute autre ligne à zéro. Puisque l'ordre de multiplication des lignes ne joue aucun rôle (par exemple, le produit de la première ligne par la seconde est égal à celui de la seconde ligne par la première), le nombre des égalités indépendantes n'est pas neuf mais six, comme il a été déjà mentionné.

Les relations obtenues sont illustrées de la meilleure façon par la rotation des axes dans le plan de coordonnées (x_1, x_2). Dans ce cas

$$x'_1 = a_{11} x_1 + a_{21} x_2,$$
$$x'_2 = a_{12} x_1 + a_{22} x_2,$$

où (fig. 40)

$$a_{11} = \cos\vartheta, \qquad a_{21} = \sin\vartheta,$$
$$a_{12} = -\sin\vartheta, \qquad a_{22} = \cos\vartheta,$$

et par suite

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos\vartheta + x_2 \sin\vartheta, \\ x'_2 &= -x_1 \sin\vartheta + x_2 \cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

En notations habituelles $x_1 = x$, $x_2 = y$ on obtient les formules connues de la géométrie analytique

$$x' = x \cos\vartheta + y \sin\vartheta,$$
$$y' = -x \sin\vartheta + y \cos\vartheta.$$

On s'est servi de ces formules pour déduire la transformation de Lorentz. Nous avons obtenu des formules de la transition directe (du repère non primé au repère primé).

Les transformations inverses sont obtenues de façon analogue. Présentons-les ensemble avec celle de la transition directe:

$$\left.\begin{aligned} x'_\alpha &= a_{\beta\alpha} x_\beta, \quad \boldsymbol{m}'_\alpha = a_{\beta\alpha} \boldsymbol{m}_\beta, \\ x_\alpha &= a_{\alpha\beta} x'_\beta, \quad \boldsymbol{m}_\alpha = a_{\alpha\beta} \boldsymbol{m}'_\beta, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

avec

$$a_{\alpha\beta} = \boldsymbol{m}_\alpha \boldsymbol{m}'_\beta = \cos(\widehat{\boldsymbol{m}_\alpha \boldsymbol{m}'_\beta}).$$

Il est évident que les formules de la transformation inverse (11) s'obtiennent automatiquement par le remplacement mutuel des grandeurs primées par les grandeurs non primées et de l'angle ϑ par $-\vartheta$ (ce qui correspond à la rotation dans le sens inverse).

Comment se transforment les composantes des vecteurs lors de la transformation des coordonnées? Cela est aisément établi en mettant à profit le procédé dont on se sert pour déduire les formules de la transformation des coordonnées. Mais on peut s'en passer, car il suffit de se rappeler que les coordonnées sont les composantes d'un vecteur, à savoir d'un rayon vecteur. Il est donc clair que les composantes vectorielles se transforment comme les coordonnées, i.e.

$$\left.\begin{aligned} b_\alpha &= a_{\alpha\beta} b'_\beta, \\ b'_\alpha &= a_{\beta\alpha} b_\beta. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

On a déjà dit qu'en Relativité restreinte on considère l'espace quadridimensionnel (pseudo-euclidien) qui inclut formellement une coordonnée imaginaire liée au temps:

$$x_1 = x, \ x_2 = y, \ x_3 = z, \ x_4 = ict.$$

La transformation lorentzienne correspond aux transformations linéaires dans cet espace:

$$\left.\begin{aligned} x'_i &= \alpha_{ki} x_k, \\ x_i &= \alpha_{ik} x'_k, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

et

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{14}$$

où V est la vitesse relative de deux systèmes de référence.

Les coefficients de la transformation de Lorentz α_{ik} vérifient les conditions suivantes:

$$\alpha_{kl} \alpha_{km} = \delta_{lm}. \tag{15}$$

Ces égalités traduisent le fait que le produit des lignes de la matrice de la transformation de Lorentz est égal à l'unité si la ligne est multipliée par elle-même et à zéro si elle est multipliée par toute autre ligne.

Calculons le déterminant de la matrice de Lorentz *):

$$\begin{vmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{vmatrix} = \Gamma^2 + (-iB\Gamma)(-iB\Gamma) = \Gamma^2 (1 - B^2) = 1$$

*) Les notions élémentaires sur les déterminants sont données au paragraphe 6 de l'Appendice. On y trouve également le calcul de ce déterminant.

(il est le plus simple de développer le déterminant suivant les éléments de la première ligne). Le déterminant de la matrice de Lorentz est donc égal à l'unité. Il s'ensuit qu'on a affaire à la transformation propre de Lorentz, c.-à-d. qu'on ne passe pas des trivecteurs de base de droite aux trivecteurs de gauche.

Ecrivons les transformations de Lorentz directe et inverse pour les coordonnées sous la forme développée:

$$x_1 = \Gamma(x_1' - i\mathrm{B}x_4'), \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = \Gamma(x_4' + i\mathrm{B}x_1'), \tag{16}$$

$$x_1' = \Gamma(x_1 + i\mathrm{B}x_4), \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = \Gamma(x_4 - i\mathrm{B}x_1). \tag{17}$$

Quant aux quadrivecteurs, ils se transforment comme les coordonnées, ce qui nous permet d'écrire pour le vecteur $\vec{A}\,(A_1, A_2, A_3, A_4)$ (quadrivecteurs sont marqués par des flèches):

$$A_i' = \alpha_{ki}A_k, \quad A_i = \alpha_{ik}A_k', \tag{18}$$

$$A_1' = \Gamma(A_1 + i\mathrm{B}A_4), \quad A_2' = A_2, \quad A_3' = A_3, \quad A_4' = \Gamma(A_4 - i\mathrm{B}A_1), \tag{19}$$

$$A_1 = \Gamma(A_1' - i\mathrm{B}A_4'), \quad A_2 = A_2', \quad A_3 = A_3', \quad A_4 = \Gamma(A_4' + i\mathrm{B}A_1'). \tag{20}$$

De (15) découle directement l'invariance du produit scalaire de deux quadrivecteurs par la transformation de Lorentz. En effet, soient $A_i = \alpha_{ik}A_k'$, $B_i = \alpha_{im}B_m'$, alors

$$\vec{A}\vec{B} = A_iB_i = \alpha_{ik}A_k'\alpha_{im}B_m' = \alpha_{ik}\alpha_{im}A_k'B_m' = \delta_{km}A_k'B_m' = A_k'B_k'.$$

La comparaison de la deuxième expression de la suite d'égalités considérée avec la dernière fait dégager l'invariance du produit scalaire $\vec{A}\vec{B}$.

3. Tenseurs. Les quantités vectorielles sont un cas particulier des quantités d'un caractère plus général qui sont les tenseurs. Avant de passer à ceux-ci, soulignons les traits essentiels de la définition des vecteurs. Dans un système de coordonnées donné, le vecteur est représenté par un segment orienté caractérisé par ses coordonnées. Mais comme le choix du système de coordonnées est arbitraire, alors les coordonnées d'un vecteur sont, elles aussi, arbitraires. Il est essentiel toutefois que d'après les coordonnées connues d'un vecteur dans un système cartésien, on peut trouver ses coordonnées cartésiennes dans un autre selon (5). Ce sont ces formules de transformation qui définissent le vecteur. Donc, la nature vectorielle des grandeurs est mise en évidence par la transformation des coordonnées.

La relation de l'électrostatique entre le vecteur induction électrique $\boldsymbol{D}$ et le vecteur intensité $\boldsymbol{E}$ d'un champ électrique extérieur nous permet de concrétiser la notion de tenseur. Généralement parlant, la relation $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{D}(E_1, E_2, E_3)$ n'est pas connue. Ecrivons $\boldsymbol{D}$ au moyen de ses composantes D_α:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}) = D_\alpha(\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{m}_\alpha = D_\alpha(E_1, E_2, E_3)\,\boldsymbol{m}_\alpha.$$

Admettant qu'en l'absence d'un champ extérieur ($\boldsymbol{E} = 0$) le vecteur $\boldsymbol{D}$ soit nul [$\boldsymbol{D}(0) = 0$] et que le champ extérieur soit faible (devant les forces électriques agissant entre les molécules de la substance), on peut développer une fonction vectorielle inconnue $\boldsymbol{D}$ en série de Taylor:

$$\left.\begin{aligned}
D_1 &= \frac{\partial D_1}{\partial E_1}(0)\,E_1 + \frac{\partial D_1}{\partial E_2}(0)\,E_2 + \frac{\partial D_1}{\partial E_3}(0)\,E_3 + \ldots = \frac{\partial D_1}{\partial E_\beta}(0)\,E_\beta + \ldots,\\
D_2 &= \frac{\partial D_2}{\partial E_\beta}(0)\,E_\beta + \ldots,\\
D_3 &= \frac{\partial D_3}{\partial E_\beta}(0)\,E_\beta + \ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

où l'on somme sur l'indice β. Vu la petitesse du champ $\boldsymbol{E}$, ses composantes E_1, E_2, E_3 sont également petites (en fait, c'est une bonne approximation pour les champs réels à l'exception des champs obtenus dans les faisceaux laser), et l'on peut se contenter des termes linéaires en négligeant tous les autres. Introduisons les notations pour les grandeurs constantes (dérivées au point zéro):

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial E_\beta}(0)=\varepsilon_{\alpha\beta}.$$

On peut alors écrire les expressions obtenues sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} D_1&=\varepsilon_{11}E_1+\varepsilon_{12}E_2+\varepsilon_{13}E_3,\\ D_2&=\varepsilon_{21}E_1+\varepsilon_{22}E_2+\varepsilon_{23}E_3,\\ D_3&=\varepsilon_{31}E_1+\varepsilon_{32}E_2+\varepsilon_{32}E_3\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

ou sous forme condensée:

$$D_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta. \tag{23}$$

La construction du vecteur $\boldsymbol{D}$ se fait aisément à l'aide de ses composantes:

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta\boldsymbol{m}_\alpha. \tag{24}$$

La relation entre deux vecteurs, exprimée par les formules (23) et (24), représente ce qu'on appelle fonction vectorielle linéaire, autrement dit, le vecteur $\boldsymbol{D}$ est une fonction vectorielle linéaire de $\boldsymbol{E}$. Etant donné le vecteur $\boldsymbol{E}$ de tout point du diélectrique dans le système de coordonnées où les coefficients $\varepsilon_{\alpha\beta}$ sont connus, on peut, en se basant sur (24), construire le vecteur $\boldsymbol{D}$. Soulignons le caractère arbitraire du choix d'un système de coordonnées. La rotation d'un angle du système de coordonnées cartésiennes modifie les composantes des vecteurs sans altérer les vecteurs eux-mêmes. Il faut seulement trouver la loi de transformation des coefficients $\varepsilon_{\alpha\beta}$ telle qu'en nouveau système soit conservée la relation

$$\boldsymbol{D}'=\varepsilon'_{\mu\lambda}E'_\lambda\boldsymbol{m}'_\mu,$$

à condition que

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}'.$$

Cela signifie que nous devons avoir deux décompositions d'un même vecteur:

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta\boldsymbol{m}_\alpha=\varepsilon'_{\mu\lambda}E'_\lambda\boldsymbol{m}'_\mu. \tag{25}$$

Or, la loi de transformation des composantes des vecteurs et des vecteures de base est connue [voir (11)]:

$$E_\beta=a_{\beta\lambda}E'_\lambda,$$

$$\boldsymbol{m}_\alpha=a_{\alpha\mu}\boldsymbol{m}'_\mu,$$

et, par conséquent, on peut récrire le premier membre de (25) conformément à ces formules en laissant le second membre sans modification:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}a_{\beta\lambda}a_{\alpha\mu}E'_\lambda\boldsymbol{m}'_\mu=\varepsilon'_{\mu\lambda}E'_\lambda\boldsymbol{m}'_\mu.$$

En comparant les coefficients de $E'_\lambda\boldsymbol{m}'_\mu$ dans les deux membres, on est conduit à la loi de transformation des coefficients $\varepsilon_{\alpha\beta}$:

$$\varepsilon'_{\mu\lambda}=a_{\beta\lambda}a_{\alpha\mu}\varepsilon_{\alpha\beta}. \tag{26}$$

Confrontons-la avec la loi de transformation des coordonnées:

$$x'_\lambda=a_{\beta\lambda}x_\beta. \tag{27}$$

La comparaison de (27) avec (26) montre que par rapport à chaque indice, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ se transforme d'après la loi correspondant à celle de transformation des coordonnées.

La loi (26) est la loi de transformation d'un tenseur. La transformation inverse a évidemment pour expression:

$$\varepsilon_{\mu\lambda}=a_{\lambda\beta}a_{\mu\alpha}\varepsilon'_{\alpha\beta}.$$

Donnons maintenant la définition générale d'un tenseur: si dans un système de coordonnées cartésiennes sont données neuf quantités $\varepsilon_{\alpha\beta}$ qui se transforment lors de la transformation des coordonnées

$$x'_{\alpha}=a_{\beta\alpha}x_{\alpha}$$

selon les formules

$$\varepsilon'_{\alpha\beta}=a_{\gamma\alpha}a_{\mu\beta}\varepsilon'_{\gamma\mu}, \tag{28}$$

ces neuf quantités forment un tenseur du deuxième ordre. Il en vient que les vecteurs se transforment comme les tenseurs du premier ordre. L'ordre du tenseur (on dit encore une valence du tenseur) est défini par le nombre de ses indices. Dans notre cas, il y en a deux. Le présent ouvrage n'emploie pas les tenseurs d'ordre supérieur. Un tenseur est donné par un espace de métrique déterminée, puisque sa loi de transformation inclut les composantes de la matrice de transformation. Nous avons envisagé l'espace tridimensionnel et les indices grecs α, β, γ, λ, μ variaient de 1 à 3.

Il serait bon de noter deux particularités de la transformation des tenseurs:

1. La loi de transformation des coefficients d'une fonction vectorielle linéaire (d'un tenseur) se base sur le lien physique invariant entre les vecteurs.

2. Toute composante du tenseur dans un « nouveau » système de coordonnées représente une combinaison linéaire de toutes les composantes du tenseur dans l'« ancien » système.

Notons un cas particulier utile de la transformation du tenseur tridimensionnel $T_{\alpha\beta}$ du deuxième ordre, dont une seule composante T_{11} n'est pas nulle lors de la rotation plane. Dans le système primé les quantités différant de zéro sont les suivantes [voir (28) et (10)]:

$$\left.\begin{aligned} T'_{11}&=a_{\lambda 1}a_{\mu 1}T_{\lambda\mu}=a_{11}^2T_{11}=T_{11}\cos^2\vartheta,\\ T'_{12}&=a_{\lambda 1}a_{\mu 2}T_{\lambda\mu}=a_{11}a_{12}T_{11}=-T_{11}\sin\vartheta\cos\vartheta.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Ces formules sont souvent rencontrées.

En Relativité restreinte on considère un espace quadridimensionnel (pseudo-euclidien). On a déjà envisagé les règles de transformation des quadrivecteurs dans cet espace (d'après notre définition, le vecteur est un tenseur du premier ordre). Au fait, les règles de transformation des tenseurs ne changent pas, mais le nombre de composantes dans ce cas croît jusqu'à seize et la sommation se fait sur les indices de 1 à 4:

$$A_{ik}=\alpha_{im}\alpha_{kl}A'_{ml},\qquad A'_{ik}=\alpha_{mi}\alpha_{lk}A_{ml}. \tag{30}$$

Le tenseur est dit symétrique si ses composantes satisfont à l'égalité $A_{ik}=$ $=A_{ki}$. Un tel tenseur n'a que dix composantes indépendantes. L'exemple en est fourni par le tenseur énergie-impulsion d'un champ électromagnétique.

Le tenseur est dit antisymétrique si ses composantes satisfont à l'égalité $A_{ik}=-A_{ki}$. Il est clair que les éléments de ces tenseur munis de deux indices identiques ($i=k$) sont nuls, car l'unique nombre qui est égal à lui-même avec le signe contraire est le zéro. Il en découle qu'un tel tenseur possède six composantes indépendantes (pour cette raison on l'appelle parfois hexavecteur). Le tenseur d'un champ électromagnétique en est l'exemple.

Le tenseur est appelé unitaire si $A_{ik}=\delta_{ik}$. On se convainc aisément qu'il n'est pas modifié par la transformation de Lorentz lors du changement de réfé-

rentiel. En effet, admettons que

$$A'_{ml} = \delta_{ml}.$$

Alors, en vertu de (30),

$$A_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kl}A'_{ml} = \alpha_{im}\alpha_{kl}\delta_{ml} = \alpha_{im}\alpha_{km} = \delta_{ik} ;$$

la dernière égalité est conforme à (15).

Nous donnons ici, à titre documentaire, les formules de transformation du tenseur T_{ik} du deuxième ordre par la transformation de Lorentz, c.-à-d. les formules du passage du repère K' au repère K (les formules du passage inverse s'obtiennent par le changement du signe de V et par le remplacement des grandeurs primées par celles non primées et réciproquement) :

$$\left.\begin{aligned}
T_{11} &= \alpha_{11}^2 T'_{11} + \alpha_{14}\alpha_{11}(T'_{41} + T'_{14}) + \alpha_{14}^2 T'_{44} = \\
&= \Gamma^2 \{T'_{11} - i\mathrm{B}(T'_{14} + T'_{41}) - \mathrm{B}^2 T'_{44}\},\\
T_{12} &= \alpha_{11}T'_{12} + \alpha_{14}T'_{42} = \Gamma\,(T'_{12} - i\mathrm{B}T'_{42}),\\
T_{13} &= \alpha_{11}T'_{13} + \alpha_{14}T'_{43} = \Gamma\,(T'_{13} - i\mathrm{B}T'_{43}),\\
T_{14} &= \alpha_{11}\alpha_{41}T'_{11} + \alpha_{14}\alpha_{41}T'_{41} + \alpha_{11}\alpha_{44}T'_{14} + \alpha_{14}\alpha_{44}T'_{44} = \\
&= \Gamma^2 \{T'_{14} + i\mathrm{B}T'_{11} + \mathrm{B}^2 T'_{41} - i\mathrm{B}T'_{44}\},\\
T_{21} &= \alpha_{11}T'_{21} + \alpha_{14}T'_{24} = \Gamma\,(T'_{21} - i\mathrm{B}T'_{24}),\\
T_{22} &= T'_{22}, \quad T_{23} = T'_{23},\\
T_{24} &= \alpha_{41}T'_{21} + \alpha_{44}T'_{24} = \Gamma\,(T'_{24} + i\mathrm{B}T'_{21}),\\
T_{31} &= \alpha_{11}T'_{31} + \alpha_{14}T'_{34} = \Gamma\,(T'_{31} - i\mathrm{B}T'_{34}),\\
T_{32} &= T'_{32}, \quad T_{33} = T'_{33},\\
T_{34} &= \alpha_{41}T'_{31} + \alpha_{44}T'_{34} = \Gamma\,(T'_{34} + i\mathrm{B}T'_{31}),\\
T_{41} &= \alpha_{11}\alpha_{41}T'_{11} + \alpha_{14}\alpha_{41}T'_{14} + \alpha_{11}\alpha_{44}T'_{41} + \alpha_{14}\alpha_{44}T'_{41} = \\
&= \Gamma^2 (T'_{41} + i\mathrm{B}T'_{11} + \mathrm{B}T'_{14} - i\mathrm{B}T'_{44}),\\
T_{42} &= \alpha_{42}T'_{12} + \alpha_{44}T'_{42} = \Gamma\,(T'_{42} + i\mathrm{B}T'_{12}),\\
T_{43} &= \alpha_{41}T'_{13} + \alpha_{44}T'_{43} = \Gamma\,(T'_{43} + i\mathrm{B}T'_{13}),\\
T_{44} &= \alpha_{41}^2 T'_{11} + \alpha_{41}\alpha_{44}T'_{41} + \alpha_{44}\alpha_{41}T'_{14} + \alpha_{44}^2 T'_{44} = \\
&= \Gamma^2 \{T'_{44} + i\mathrm{B}(T'_{14} + T'_{41}) - \mathrm{B}^2 T'_{11}\}.
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Les grandeurs tensorielles sont très répandues. Nous donnons quelques exemples des tenseurs du deuxième ordre dans l'espace quadridimensionnel qu'on va utiliser par la suite. Les produits des composantes de deux vecteurs $\vec{c}\,(c_i)$ et $\vec{b}\,(b_k)$ forment un tenseur. En effet, composons l'expression

$$A_{ik} = c_i b_k.$$

Les formules de transformation des composantes des vecteurs sont connues:

$$c_i = \alpha_{im}c'_m, \qquad b_k = \alpha_{kl}b'_l. \qquad (32)$$

Par conséquent,

$$A_{ik} = c_i b_k = \alpha_{im}\alpha_{kl}c'_m b'_l = \alpha_{im}\alpha_{kl}A'_{ml},$$

ce qui est justement la loi de transformation des tenseurs (30).

Démontrons que la dérivée de chaque composante d'un vecteur par rapport à chaque coordonnée se transforme comme la composante d'un tenseur. Considérons le vecteur $\vec{b}\,(b_i)$ et les dérivées de ses composantes. Ecrivons deux for-

mules

$$b_i = \alpha_{im} b'_m, \qquad x'_l = \alpha_{kl} x_k, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial x'_l}{\partial x_k} = \alpha_{kl},$$

qui s'appliquent à la suite d'égalités:

$$\frac{\partial b_i}{\partial x_k} = \frac{\partial b_i}{\partial x'_l}\frac{\partial x'_l}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x'_l}(\alpha_{im} b'_m)\frac{\partial x'_l}{\partial x_k} = \alpha_{im}\alpha_{kl}\frac{\partial b'_m}{\partial x'_l}. \tag{33}$$

La première et la dernière expression de (33) montrent que la dérivée $\frac{\partial b_i}{\partial x_k}$ se transforme d'après la loi de transformation des composantes du tenseur.

Il s'ensuit de (33) également que la transformation de la dérivée d'un vecteur se fait de proche en proche. On passe d'abord de b'_m à b_i conformément à la formule $b_i = \alpha_{im} b'_m$. Ensuite, la dérivation par rapport à x'_l est remplacée par celle par rapport à x_k. Le caractère tensoriel de la transformation y subsiste mais implicitement. On recourt à ce procédé lors de la transformation d'un champ électromagnétique afin d'éviter l'introduction du tenseur.

4. Invariance de la quadridivergence et de l'opérateur de d'Alambert. Démontrons l'invariance de la divergence quadridimensionnelle et de l'opérateur de d'Alambert par la transformation de Lorentz. Ecrivons de nouveau les formules nécessaires sous forme convenable

$$x'_i = \alpha_{ki} x_k, \qquad \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \alpha_{ki}$$

et pour les composantes du vecteur $\vec{b}$

$$b'_i = \alpha_{ki} b_k, \qquad b_k = \alpha_{ki} b'_i.$$

Démontrons avant tout que le quadrigradient se transforme comme un vecteur. Soit la fonction

$$\varphi = \varphi(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$$

ou, en abrégé,

$$\varphi = \varphi(x'_i).$$

Supposons que la transformation des coordonnées soit définie par les formules

$$x'_i = x'_i(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Conformément à la règle de dérivation des fonctions composées, on a alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \alpha_{ki}\frac{\partial \varphi}{\partial x'_i}.$$

C'est la loi de transformation des composantes d'un vecteur (32).

Montrons que la quadridivergence est un invariant. On peut le démontrer par la suite d'égalités:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \alpha_{ki}\frac{\partial}{\partial x'_i}(A'_l\alpha_{kl}) = \alpha_{ki}\alpha_{kl}\frac{\partial A'_l}{\partial x'_i} = \delta_{il}\frac{\partial A'_l}{\partial x'_i} = \frac{\partial A'_i}{\partial x'_i}$$

où l'on a tenu compte de ce que selon (15) $\alpha_{ki}\alpha_{kl} = \delta_{il}$.

L'opérateur de d'Alambert appliqué à la fonction Φ

$$\Box\Phi \equiv \Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

peut se présenter sous la forme:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial (ict)^2}.$$

Or, l'expression $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}$ est tout simplement la divergence du gradient. En effet, soit $A_i=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$, alors

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}.$$

La divergence du quadrivecteur étant un invariant de la transformation de Lorentz, on a, par conséquent,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i'^2}. \tag{34}$$

On peut prendre pour fonction Φ toute composante d'un quadrivecteur quelconque $\vec{\Phi}$ (Φ_k). Supposons que dans le repère K existe une équation qui relie les composantes correspondantes de deux quadrivecteurs $\vec{\Phi}$ (Φ_k) et $\vec{s}$ (s_k):

$$\Box\Phi_k=\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x_i^2}=-\mu_0 s_k. \tag{35}$$

De (34) découle que si (35) est vérifiée, alors

$$\Box'\Phi_k=\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x_i'^2}=-\mu_0 s_k \tag{36}$$

l'est également. Le produit des deux membres de (36) par le facteur constant α_{km} et la sommation sur k entraînent immédiatement

$$\Box'\Phi'_m=-\mu_0 s'_m, \tag{37}$$

puisque $\alpha_{km}\Phi_k=\Phi'_m$. La comparaison de (35) avec (37) montre que dans le repère K' on a la même équation que dans le repère K où l'on a remplacé les quantités non primées par celles primées.

5. **Contraction des indices d'un tenseur.** La contraction est une opération constamment pratiquée dans les applications du calcul tensoriel et visant à diminuer l'ordre du tenseur. Dans le cas du tenseur du second ordre, elle consiste à sommer ses composantes ayant deux indices égaux. Il est remarquable que cette opération conduit à l'expression invariante. En ce qui concerne les tenseurs d'ordre plus élevé, la contraction entraîne la diminution de l'ordre de deux unités.

La démonstration en est simple. Ecrivons la transformation des composantes tensorielles:

$$A_{ik}=\alpha_{im}\alpha_{kl}A'_{ml}$$

et sommons les composantes A_{ik} avec les indices égaux en posant $i=k$:

$$A_{ii}=A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44}=\alpha_{im}\alpha_{il}A'_{ml}=\delta_{ml}A'_{ml}=A'_{mm}$$

en vertu de (15). Ainsi donc,

$$A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44}=A'_{11}+A'_{22}+A'_{33}+A'_{44}. \tag{38}$$

Bien que dans ce livre on n'utilise guère les tenseurs des ordres supérieurs, on les rencontre sous forme contractée. On a vu que la dérivation d'une fonction

scalaire (i.e. d'un invariant) entraînait la formation d'un vecteur qui est le gradient de la fonction $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$. La dérivation du vecteur fait naître le tenseur du deuxième ordre $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k}$. La contraction de celui-ci est un invariant (34):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i'^2}.$$

Si les composantes du tenseur du second ordre sont fonction des coordonnées, leurs dérivées forment le tenseur du troisième ordre. Par exemple, à partir du tenseur f_{ik} on obtient le tenseur $\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l}$ du $3^{\text{ième}}$ ordre.

La contraction de ce dernier tenseur sur les indices k et l entraîne la formation de quatre quantités qui sont les composantes du vecteur. En effet,

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_m'} (\alpha_{is} \alpha_{kp} f_{sp}') \frac{\partial x_m'}{\partial x_k} =$$

$$= \alpha_{is} \alpha_{kp} \alpha_{km} \frac{\partial f_{sp}'}{\partial x_m'} = \alpha_{is} \delta_{pm} \frac{\partial f_{sp}'}{\partial x_m'} = \alpha_{is} \frac{\partial f_{sm}'}{\partial x_m'}. \qquad (39)$$

Tenant compte de ce que les indices k, m, s sont muets, on voit que les quantités $\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k}$ se transforment selon la loi de transformation des vecteurs (32).

Maintenant, cherchons à construire les expressions invariantes à partir des composantes de tenseurs du deuxième ordre. Si le produit des composantes de deux vecteurs conduit, comme on l'a déjà vu, au tenseur du deuxième ordre, le produit des composantes de deux tenseurs du deuxième ordre fournit, comme il est facile de le vérifier, le tenseur du quatrième ordre. Soient F_{ik} les composantes du tenseur $\mathfrak{F}$ et f_{lm} celles du tenseur $\mathfrak{f}$. Leur produit

$$T_{iklm} = F_{ik} f_{lm}$$

représente le tenseur du quatrième ordre. Opérons la contraction sur les indices i et l ainsi que sur k et m, autrement dit composons l'expression

$$F_{ik} f_{ik}, \qquad (40)$$

qui est une somme des produits deux à deux des composantes correspondantes. Nous allons voir que cette expression n'est pas modifiée par le changement de référentiel. Il est facile de le démontrer puisqu'on connaît la loi de transformation des composantes F_{ik} et f_{lm}:

$$F_{ik} f_{lm} = \alpha_{is} \alpha_{kp} F_{sp}' \alpha_{lr} \alpha_{mt} f_{rt}'.$$

En posant $i = l$, $k = m$ on obtient

$$F_{ik} f_{ik} = \alpha_{is} \alpha_{ir} \alpha_{kp} \alpha_{kt} F_{sp}' f_{rt}' = \delta_{rs} \delta_{pt} F_{sp}' f_{rt}' = F_{sp}' f_{sp}'. \qquad (41)$$

L'égalité (41) est la démonstration de l'invariance de (40). Certes, l'invariance de F_{ik}^2 ou de f_{ik}^2 est un cas particulier de (40).

Le théorème de Gauss-Ostrogradski est fréquemment utilisé pour les vecteurs qui représentent la contraction tridimensionnelle d'un tenseur; il semble donc pratique d'écrire des formules correspondantes. Dans l'espace tridimensionnel, ce théorème concerne la transformation du flux d'un vecteur à travers une surface fermée S en intégrale étendue au volume $\mathfrak{V}$ intérieur à cette sur-

face, par exemple:

$$\oint_S \boldsymbol{D}\, dS = \int_{\mathfrak{B}} \operatorname{div} \boldsymbol{D}\, d\mathfrak{B}. \tag{42}$$

En notations symétriques, le même théorème a la forme

$$\oint_S D_\alpha n_\alpha\, dS = \int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial D_\alpha}{\partial x_\alpha}\, d\mathfrak{B}, \tag{43}$$

où n_α sont les composantes de la normale à l'élément de surface dS. En appliquant (43) au vecteur

$$A_\beta = \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha},$$

on obtient

$$\int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}\, \partial\mathfrak{B} = \oint_S f_{\alpha\beta} n_\alpha\, dS. \tag{44}$$

6. Quelques renseignements concernant les déterminants. Tenseurs duaux. 1. Disposons n^2 éléments désignés par le symbole a_{ik} où chacun des i, k prend toutes les valeurs de 1 à n, en forme d'un carré. L'indice i de l'élément a_{ik} désigne le numéro de la ligne et l'indice k le numéro de la colonne où est inséré cet élément. Ainsi, on a formé une matrice carrée à l'aide des éléments a_{ik}:

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On peut construire son déterminant

$$D_n = | a_{ik} | = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

qui sous-entend une opération déterminée sur les éléments a_{ik}, c.-à-d. la formation de la somme de $n!$ termes homogènes de puissance n à partir des éléments a_{ik}. Cette somme peut être obtenue de la façon suivante. Prenons le produit des éléments des lignes différentes, par exemple des lignes $1\ 2\ \dots\ n$,

$$a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\tau} \tag{45}$$

ou le produit des éléments de différentes colonnes, par exemple $1\ 2\ \dots\ n$,

$$a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \dots a_{\tau n}, \tag{46}$$

où les valeurs des indices $\alpha\beta\ \dots\ \tau$ sont à déterminer. Le déterminant se déduira comme somme algébrique des termes de la forme (45) ou (46), qui se distinguent par la suite d'indices $\alpha\beta\ \dots\ \tau$, déduite de la suite naturelle $1\ 2\ \dots\ n$ par une substitution. On effectue la sommation sur toutes ces suites, obtenues de la suite naturelle $1\ 2\ \dots\ n$, dont le nombre total est $n!$.

On attribue à chaque terme de la somme le signe « plus » ou « moins » selon que le nombre de substitutions échangeant 2 éléments (transpositions) qu'il faut pour passer de la suite naturelle $1\ 2\ \dots\ n$ à la suite $\alpha\beta\ \dots\ \tau$ est pair

ou impair. L'exemple de la transposition paire est fourni par le passage de la suite 1 2 3 4 à la suite 1 3 2 4 qui diffère de la précédente par la permutation de 2 et 3. Le nombre d'inversions nécessaires effectuées sur la suite naturelle pour en obtenir la suite donnée est désigné par r. Ainsi, par définition, le déterminant d'ordre n est développé de la façon suivante:

$$D_n = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum^{\alpha\neq\beta\neq\dots\neq\tau} (-1)^r a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \dots a_{\tau n} =$$

$$= \sum^{\alpha\neq\beta\neq\dots\neq\tau} (-1)^r a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\tau}, \qquad (47)$$

où la sommation s'effectue sur toutes les permutations des indices $\alpha\beta \dots \tau$ parcourant les valeurs de 1 à n. Deux dernières expressions de l'égalité traduisent l'une des propriétés fondamentales du déterminant, à savoir l'équivalence des lignes et des colonnes. Certes, il n'est pas obligatoire de suivre la suite naturelle des premiers indices (45) ou des seconds (46). Mais il s'impose alors la nouvelle désignation pour les indices $\alpha\beta \dots \tau$ qui ramène les termes à la forme canonique (45) ou (46). Cela entraînerait des transpositions de ces indices, donc celles des lignes ou des colonnes du déterminant. Il en résulte qu'une substitution quelconque effectuée sur les lignes (ou les colonnes) ne change pas le déterminant ou le remplace par son opposé, selon que le nombre de transpositions est pair ou impair respectivement. Donc, on peut dire que si l'on fixe une suite de n indices telle que $i\ k \dots s$ et effectue la sommation des termes sur les permutations des indices $\alpha\ \beta \dots \tau$ avec les signes appropriés, c.-à-d. si

$$\sum^{\alpha\neq\beta\neq\dots\neq\tau} (-1)^r a_{\alpha i} a_{\beta k} \dots a_{\tau s},$$

cette somme sera égale à $\pm D_n$ selon que la suite $i\ k \dots s$ se déduit de la suite naturelle $1\ 2 \dots n$ par le nombre pair ou impair de transpositions.

Donnons, à titre d'illustration, le développement du déterminant D_3 du troisième ordre:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum^{\alpha\neq\beta\neq\gamma} (-1)^r a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} =$$

$$= \underset{(\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=3)}{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underset{(312)}{a_{13}a_{21}a_{32}} + \underset{(231)}{a_{12}a_{23}a_{31}} - \underset{(321)}{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underset{(132)}{a_{11}a_{23}a_{32}} - \underset{(213)}{a_{12}a_{21}a_{33}}.$$

2. Calcul d'un déterminant. Considérons tous les termes du déterminant D_n qui contiennent l'élément a_{ik} et mettons a_{ik} en facteur dans la somme algébrique de ces termes (47). L'expression A_{ik}, i.e. le coefficient de l'élément a_{ik} dans le développement du déterminant, est dite cofacteur de l'élément a_{ik}. Il se détermine très simplement. Pour ce faire, on supprime dans le déterminant D_n la ligne et la colonne de l'élément a_{ik} dont le cofacteur A_{ik} est à déterminer. En supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne on obtient le déterminant D_{n-1} d'ordre $(n - 1)$, dit mineur Δ_{ik} de l'élément a_{ik}:

$$\Delta_{ik} = D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,k-1} & a_{1,\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,\,1} & a_{i-1,\,2} & \dots & a_{i-1,\,k-1} & a_{i-1,\,k+1} & \dots & a_{i-1,\,n} \\ a_{i+1,\,1} & a_{i+1,\,2} & \dots & a_{i+1,\,k-1} & a_{i+1,\,k+1} & \dots & a_{i+1,\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,k-1} & a_{n,\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le cofacteur de l'élément A_{ik} ne peut différer du mineur Δ_{ik} que par son signe:

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}\Delta_{ik}.$$

A chaque élément correspond son cofacteur mais un élément donné n'est pas obligatoirement inclu dans tous les termes de la somme (47). On peut choisir un nombre nécessaire d'éléments du déterminant, qui avec leurs cofacteurs permettront de calculer le déterminant. Il existe le théorème qui dit qu'on peut développer le déterminant par rapport aux éléments de toute ligne (ou de toute colonne) de la façon suivante:

$$D_n=\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha k}A_{\alpha k}=\sum_{\beta=1}^{n} a_{k\beta}A_{\beta k},$$

où l'on ne somme pas sur k qui peut avoir toute valeur fixe de 1 à n. La somme des produits des éléments d'une ligne (ou d'une colonne) quelconque par les mineurs d'une autre ligne (ou d'une autre colonne) est toujours nulle:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha k}A_{\alpha i}=0 \qquad (\alpha\neq i).$$

Les deux dernières formules fusionnent en une seule:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha k}A_{\alpha i}=D\delta_{ik}.$$

Calculons, à titre d'exemple, le déterminant de la matrice de la transformation de Lorentz (II, 24) en le développant par rapport aux éléments de la première ligne:

$$D_L=\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\ \alpha_{41}&\alpha_{42}&\alpha_{43}&\alpha_{44}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\Gamma&0&0&iB\Gamma\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ -iB\Gamma&0&0&\Gamma\end{vmatrix}=\Gamma\begin{vmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&\Gamma\end{vmatrix}-$$

$$-iB\Gamma\begin{vmatrix}0&1&0\\ 0&0&1\\ -iB\Gamma&0&0\end{vmatrix}=\Gamma^2-B^2\Gamma^2=\Gamma^2(1-B^2)=1.$$

Le lecteur peut aisément s'assurer que le produit des éléments de la première ligne par les cofacteurs des éléments des autres lignes est nul.

3. Introduisons le tenseur unitaire complètement antisymétrique d'ordre n. On appelle ainsi un tenseur $\delta_{\alpha\beta\ldots\tau}$ dont les composantes non nulles sont égales à $+1$ ou à -1 et changent de signes par toute transposition des indices. Il découle de l'antisymétrie du tenseur $\delta_{\alpha\beta\ldots\tau}$ que toute composante dont deux indices sont égaux est nulle (la transposition de ces indices fait changer le signe de la composante en vertu de la condition d'antisymétrie et, pourtant, on obtient la même composante; or, au changement de signe seul le zéro est égal à lui-même). Ainsi donc, seules les composantes $\delta_{\alpha\beta\ldots\tau}$ dont les indices sont tous différents ne sont pas nulles. Soit $\delta_{12\ldots n}=1$, alors les composantes non nulles $\delta_{\alpha\beta\ldots\tau}$ sont égales à $+1$ si la suite $\alpha\beta\ldots\tau$ est obtenue de la suite naturelle $1\,2\ldots n$ par les transpositions dont le nombre est pair. Au contraire, si le nombre de ces transpositions dans la suite $\alpha\beta\ldots\tau$ est impair, la composante $\delta_{\alpha\beta\ldots\tau}$ est égale à -1. Ayant recours au tenseur unitaire complètement antisymétrique on peut mettre l'expression du déterminant D_n

sous la forme:

$$D = \delta_{\alpha\beta\ldots\tau}\, a_{1\alpha}a_{2\beta}\ldots a_{n\tau} = \delta_{\alpha\beta\ldots\tau}\, a_{\alpha 1}a_{\beta 2}\ldots a_{\tau n},$$

où l'on entend la sommation sur les couples d'indices $\alpha\beta\ldots\tau$.

En particulier, le déterminant associé à la matrice lorentzienne a pour expression:

$$D_L = \delta_{\alpha\beta\gamma\rho}\alpha_{1\alpha}\alpha_{2\beta}\alpha_{3\gamma}\alpha_{4\rho} = 1.$$

4. Quadriespace relativiste. Soulignons avant tout le fait que l'on a donné la définition du tenseur unitaire complètement antisymétrique $\delta_{\beta\gamma\rho\mu}$ sans aucune démonstration. On doit s'assurer que dans tout référentiel d'inertie (i.e. lors de la transformation de Lorentz), les composantes de ce tenseur se conservent. Toutefois, il est facile de le montrer d'après la règle de transformation des composantes tensorielles:

$$\delta'_{iklm} = \alpha_{i\beta}\alpha_{k\gamma}\alpha_{l\rho}\alpha_{m\mu}\delta_{\beta\gamma\rho\mu}.$$

Or, d'après le point 1, le second membre est égal à $D_L\delta_{iklm}$, soit à ± 1 selon le nombre de transpositions qu'il faut effectuer sur la suite naturelle pour aboutir à la suite *iklm*. Cela signifie justement que $\delta_{\beta\gamma\rho\mu}$ a les mêmes composantes quel que soit le référentiel d'inertie. Les composantes demeurent également les mêmes quand on passe du système de coordonnées à gauche à celui à droite (c.-à-d. quand une des trois coordonnées spatiales change de signe). Dans ce cas les composantes du tenseur devraient changer de signe comme il vient de (30). C'est la raison pour laquelle $\delta_{\beta\gamma\rho\mu}$ n'est pas un tenseur mais pseudo-tenseur; ses composantes se comportent de façon différente que celles du tenseur lors du changement de signe des coordonnées (réflexions). Dans toutes les autres transformations ces composantes s'identifient à celles de n'importe quel tenseur.

5. Les produits vectoriel et mixte des vecteurs dans l'espace tridimensionnel. On traite de ces sujets pour avoir des analogies en considérant certaines grandeurs dans l'espace quadridimensionnel relativiste.

Soient trois vecteurs unitaires $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{m}_3$ d'un système de coordonnées cartésiennes orthogonales. Composons, au choix, le produit vectoriel d'un couple de vecteurs $\boldsymbol{m}_\alpha \times \boldsymbol{m}_\beta$; on obtient un troisième vecteur affecté du signe « plus » ou « moins » selon l'ordre des facteurs dans le produit vectoriel. On peut écrire aisément ce produit à l'aide du tenseur unitaire complètement antisymétrique d'ordre 3:

$$\boldsymbol{m}_\alpha \times \boldsymbol{m}_\beta = \delta_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{m}_\gamma.$$

Il est maintenant facile d'écrire le produit vectoriel de deux vecteurs $\boldsymbol{a}_1 = a_{1\alpha}\boldsymbol{m}_\alpha$ et $\boldsymbol{a}_2 = a_{2\beta}\boldsymbol{m}_\beta$; en effet,

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = a_{1\alpha}\boldsymbol{m}_\alpha \times a_{2\beta}\boldsymbol{m}_\beta = a_{1\alpha}a_{2\beta}\boldsymbol{m}_\alpha \times \boldsymbol{m}_\beta = \delta_{\alpha\beta\gamma}a_{1\alpha}a_{2\beta}\boldsymbol{m}_\gamma. \tag{48}$$

Il vient de (48) que les facteurs de $\boldsymbol{m}_\gamma$, formés des produits des composantes de vecteurs, sont contractés avec le tenseur $\delta_{\alpha\beta\gamma}$. Récrivons (48):

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \delta_{\alpha\beta\gamma}a_{1\alpha}a_{2\beta}\boldsymbol{m}_\gamma = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta\gamma}a_{1\alpha}a_{2\beta} + \delta_{\beta\alpha\gamma}a_{1\beta}a_{2\alpha}\right)\boldsymbol{m}_\gamma =$$

$$= \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta\gamma}\left(a_{1\alpha}a_{2\beta} - a_{2\alpha}a_{1\beta}\right)\boldsymbol{m}_\gamma = \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta\gamma}C_{\alpha\beta}\boldsymbol{m}_\gamma.$$

Dans la troisième égalité de cette suite on a ajouté le deuxième terme égal au premier mais dont les indices muets α et β ont changé de places. On y a tenu également compte de ce que $\delta_{\beta\alpha\gamma} = -\delta_{\alpha\beta\gamma}$. Dans la quatrième égalité $\delta_{\alpha\beta\gamma}$ est mis en facteur. Le tenseur antisymétrique, apparu dans la parenthèse, est

noté par $C_{\alpha\beta} = a_{1\alpha}a_{2\beta} - a_{1\beta}a_{2\alpha}$. Le produit vectoriel $a_1 \times a_2$ représente donc un vecteur dont les composantes dérivent du tenseur antisymétrique $C_{\alpha\beta}$ selon les formules

$$C_\gamma = \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta\gamma}C_{\alpha\beta}.$$

On dit que le vecteur $\boldsymbol{C}$ (C_γ) est dual du tenseur antisymétrique $C_{\alpha\beta}$. Cela signifie que le vecteur $\boldsymbol{C}$ est orthogonal à deux vecteurs $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$ qui définissent le plan bidimensionnel. L'orthogonalité est analytiquement démontrée:

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}_1 = C_\gamma a_{1\gamma} = \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta\gamma}C_{\alpha\beta}a_{1\gamma} = \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta\gamma}\,\{a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{1\gamma} - a_{1\beta}a_{2\alpha}a_{1\gamma}\} = 0.$$

L'égalité à zéro est due à ce que les deux termes de l'accolade sont les déterminants ayant les lignes identiques. Or, ceux-ci sont nuls. On montre de façon analogue que $\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}_2 = 0$. D'après son sens géométrique, le module du vecteur $\boldsymbol{C}$ est numériquement égal à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$.

Le produit mixte de trois vecteurs $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ a pour expression $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ et se définit de la façon suivante [$\delta_{\lambda\gamma}$ est le symbole de Kronecker (4)]:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) &= \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3) = a_{1\lambda}\boldsymbol{m}_\lambda\delta_{\alpha\beta\gamma}a_{2\alpha}a_{3\beta}\boldsymbol{m}_\gamma = \\ &= \delta_{\alpha\beta\gamma}a_{1\lambda}a_{2\alpha}a_{3\beta}\boldsymbol{m}_\lambda\boldsymbol{m}_\gamma = a_{1\lambda}\delta_{\lambda\gamma}a_{2\alpha}a_{3\beta}\delta_{\alpha\beta\gamma} = \\ &= \delta_{\alpha\beta\gamma}a_{1\gamma}a_{2\alpha}a_{3\beta} = D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

C'est le volume du parallélépipède ayant ces vecteurs pour côtés. Il est positif ou négatif selon l'ordre des vecteurs $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ dans le produit mixte.

6. Tenseurs duaux. Soient $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$ les quadrivecteurs de l'espace quadridimensionnel. Les projections de l'aire du parallélogramme sur les plans de coordonnées (x_i, x_k) sont alors définies par le tenseur antisymétrique $\xi_{ik} = a_{1i}a_{2k} - a_{2i}a_{1k}$. Dans l'espace quadridimensionnel, à toute section ξ_{ik} on peut faire correspondre la section normale ξ^*_{ik} telle que toutes les droites tracées sur cette section sont perpendiculaires à celles de la section précédente. Si la section ξ^*_{ik} normale à ξ_{ik} a la même aire, elle est alors dite duale de ξ_{ik}. On démontre que

$$\xi^*_{ik} = \frac{1}{2}\,\delta_{iklm}\xi_{lm}. \tag{49}$$

D'après cette formule, on peut associer à tout tenseur antisymétrique un tenseur dual du premier. A un certain sens, le tenseur dual f^*_{ik} est équivalent au tenseur initial f_{ik}. On a déjà vu que le second groupe d'équations de Maxwell s'exprime au moyen du tenseur dual F^*_{ik}. La somme des produits des composantes du tenseur antisymétrique par leurs cofacteurs duaux est un pseudo-scalaire

$$\begin{aligned}F_{ik}F^*_{ik} &= \frac{1}{2}\,\delta_{iklm}F_{ik}F_{lm} = \frac{1}{2}\,\alpha_{ia}\alpha_{kb}\alpha_{lc}\alpha_{md}\delta'_{abcd}\alpha_{ir}\alpha_{ks}F'_{rs}\alpha_{lt}\alpha_{mn}F'_{tn} = \\ &= \frac{1}{2}\,\delta_{ar}\delta_{bs}\delta_{ct}\delta_{dn}\delta_{abcd}F'_{rs}F'_{tn} = \frac{1}{2}\,\delta_{rstn}F'_{rs}F'_{tn} = F'_{rs}F^*_{rs}.\end{aligned}$$

Ces égalités ont recours à la définition (49), aux formules de transformation des tenseurs (30), aux propriétés des éléments de la matrice de Lorentz (15).

Il est aisé de démontrer que $F_{ik}^2 = F_{ik}F_{ik}$ est aussi invariant:

$$F_{ik}F_{ik} = \alpha_{ia}\alpha_{kb}F'_{ab}\alpha_{ic}\alpha_{kd}F'_{cd} = \delta_{ac}\delta_{bd}F'_{ab}F'_{cd} = F'_{ab}F'_{ab}.$$

Ces deux invariants ont été utilisés au paragraphe 37.

7. Tenseur des tensions. Dans la mécanique des milieux continus on introduit le tenseur des tensions qui permet de représenter la force appliquée à tout le volume sous forme de la force qui s'exerce sur une surface limitant ce volume. C'est ce qu'on a obtenu, d'ailleurs, en étudiant les forces d'un champ électromagnétique; il paraît utile d'analyser un problème semblable en mécanique où la physique est manifeste.

Si un corps élastique est soumis à une contrainte, il se crée des forces intérieures tendant à ramener ce corps à l'état d'équilibre. Ces forces sont appelées tensions intérieures. Elles proviennent des interactions entre les molécules. La particularité de ces forces est qu'elles sont caractérisées par un « faible rayon d'action », autrement dit, leur influence ne s'étend qu'à des distances microscopiques (atomiques). Il en vient que les forces appliquées à un certain volume $\mathfrak{B}$ à l'intérieur du corps se ramènent à celles agissant sur la surface enveloppant ce volume.

En effet, soit $\boldsymbol{F}$ la force appliquée à l'unité de volume. Isolons dans le corps un volume $\mathfrak{B}$ et considérons la force résultante qui est appliquée à ce dernier. Si le volume $d\mathfrak{B}$ est soumis à la force $\boldsymbol{F}d\mathfrak{B}$, la force résultante est égale à

$$\int_{\mathfrak{B}} \boldsymbol{F}\, d\mathfrak{B}. \tag{50}$$

Or, les forces agissant entre les parties différentes du volume considéré s'annulent selon le principe de l'action et de la réaction et, par conséquent, ne peuvent donner la résultante qui diffère de zéro. Il en vient que la force résultante appliquée au volume est due à l'action des éléments du corps, environnant le volume $\mathfrak{B}$. Or, ces forces, comme on l'a déjà dit, s'appliquent à la surface enveloppant le volume. La force résultante se ramène donc, à l'intégrale de surface et en particulier sa $\beta^{\text{ième}}$ composante

$$\int_{\mathfrak{B}} F_\beta\, d\mathfrak{B} \tag{51}$$

elle aussi, devient une intégrale de surface. Cela n'est possible que si F_β peut se présenter sous la forme:

$$F_\beta = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}, \tag{52}$$

où on ne sait de la quantité $T_{\alpha\beta}$ qu'elle est une composante d'un tenseur (c'est à cette condition seulement qu'on obtient le vecteur en faisant la contraction). Dans ce cas, selon (44)

$$\int_{\mathfrak{B}} F_\beta\, d\mathfrak{B} = \int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\, d\beta = \oint_S T_{\alpha\beta} n_\alpha\, dS. \tag{53}$$

Multipliant les deux membres de (53) par $\boldsymbol{m}_\beta$ et faisant pratiquement la somme, on obtient:

$$\int_{\mathfrak{B}} \boldsymbol{F}\, d\mathfrak{B} = \int_{\mathfrak{B}} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\, \boldsymbol{m}_\beta d\mathfrak{B} = \oint_S T_{\alpha\beta} n_\alpha\, \boldsymbol{m}_\beta\, dS. \tag{54}$$

L'expression (54) montre que la force résultante appliquée au volume est ramenée à l'intégrale de surface. Par conséquent, le résultat obtenu peut se formuler ainsi : si la force $\boldsymbol{F}$ s'éxerçant sur l'unité de volume peut se présenter sous la forme

$$\boldsymbol{F}=\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\,\boldsymbol{m}_\beta, \tag{55}$$

son action sur tout le volume se traduira par l'action d'une force superficielle répartie sur la surface limitant ce volume, et l'élément de surface dS, dont la normale $\boldsymbol{n}$ a pour composantes n_α, est soumis à la force

$$T_{\alpha\beta} n_\alpha \boldsymbol{m}_\beta. \tag{56}$$

Quelle est donc la signification physique des composantes du tenseur des tensions? Revenons au volume $\mathfrak{B}$ à l'intérieur d'un corps déformé. La force exercée sur l'élément de surface dS enveloppant le volume $\mathfrak{B}$ dépend de la valeur de dS et de sa direction, i.e. de l'orientation de sa normale $\boldsymbol{n}$. Désignons cette force par $\boldsymbol{p}_n\, dS$ et notons que son orientation ne coïncide pas en général avec celle de la normale à dS (fig. 41). Le vecteur $\boldsymbol{p}_n$ qui est une force appliquée à l'unité de surface et dépendant de l'orientation de cette dernière est appelé tension sur la surface dS dont la normale est $\boldsymbol{n}$. En tout point d'un corps élastique déformé, à toute orientation de $\boldsymbol{n}$ correspond son vecteur tension $\boldsymbol{p}_n$. Dans tout système de coordonnées cartésiennes, on peut déterminer les tensions $\boldsymbol{p}_x$, $\boldsymbol{p}_y$, $\boldsymbol{p}_z$ appliquées aux surfaces unitaires dont les normales sont colinéaires aux axes de coordonnées. Il sera montré que la tension appliquée à toute surface infinitésimale dS définie par le vecteur $\boldsymbol{n}$ peut se présenter comme l'ensemble de neuf composantes des vecteurs $\boldsymbol{p}_x$, $\boldsymbol{p}_y$, $\boldsymbol{p}_z$, qui forment le tenseur des tensions $T_{\alpha\beta}$.

Fig. 41. a) Tension appliquée à l'élément de surface dS à la limite du volume contraint. $\boldsymbol{n}$ est la normale à l'élément dS, $\boldsymbol{p}_n$ la force qui y est appliquée. b) Sur l'établissement de la condition d'équilibre d'un volume ayant la forme d'un tétraèdre élémentaire. On a pris pour normale à la surface du tétraèdre la normale extérieure. Les faces BOC, AOC et AOB ont pour normale $-\boldsymbol{i}$, $-\boldsymbol{j}$, $-\boldsymbol{k}$ respectivement. Leurs aires sont évidemment égales à $dS\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, x})$, $dS\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, y})$, $dS\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, z})$ respectivement.

Supposons qu'un corps subissant des déformations élastiques soit en équilibre. Considérons le tétraèdre élémentaire $OABC$ dont l'aire de la face oblique est égale à dS. Supposons que la normale $\boldsymbol{n}$ à cette face forme un angle aigu avec l'axe des x. Les faces du tétraèdre coplanaires aux plans coordonnées sont égales à

$$dS\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, x}),\quad dS\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, y}),\quad dS\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, z}).$$

Les normales à ces faces sont de sens opposé aux vecteurs de base $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ respectivement. Il en vient que la face BOC est soumise à l'action de la force $-\boldsymbol{p}_x\, dS\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, x})$. La valeur de $\boldsymbol{p}_x$ est la même quel que soit le point de la face infinitésimale BOC. Les autres faces AOC et AOB subissent l'action des forces $-\boldsymbol{p}_y\, dS\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, y})$ et $-\boldsymbol{p}_z\, dS\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, z})$ respectivement. Le tétraèdre étant

en équilibre, la somme géométrique de ces forces est nulle:

$$dS\,[p_n - p_x \cos(\widehat{n,\,x}) - p_y \cos(\widehat{n,\,y}) - p_z \cos(\widehat{n,\,z})] = 0,$$

d'où la tension recherchée p_n s'exprime au moyen de p_x, p_y, p_z de la façon suivante:

$$p_n = p_x \cos(\widehat{n,\,x}) + p_y \cos(\widehat{n,\,y}) + p_z \cos(\widehat{n,\,z}). \qquad (57)$$

Dans (57) il suffit de passer aux notations symétriques pour s'assurer qu'il s'agit d'un tenseur. En effet, n étant la normale à une face arbitrairement choisie et ayant pour composantes n_α, on a $p_n = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 = p_\alpha n_\alpha$. Mais à son tour $p_\alpha = p_{\alpha\beta} m_\beta$ où $p_{\alpha\beta}$ sont les composantes du vecteur p_α ; il en vient

$$p_n = p_{\alpha\beta} m_\beta n_\alpha. \qquad (58)$$

Selon (58), les neuf composantes du vecteur p_α se transforment comme un tenseur [cf., par exemple, (24)].

Bibliographie

The principal of relativity. New York, Dover publication, 1952.

A l b e r t E i n s t e i n, Œuvres choisies (Собрание сочинений) en quatre volumes. Moscou, Naouka, 1965, 1966, 1967.

R. B e c k e r, Theorie der Elektrizität. Band. II. Elcktronentheorie. 6, vollständig neubearbeitete Auflage des Werkes von M. Abraham Leipzig und Berlin Verlag und druck von B. G. Teubner 1933.

L. L a n d a u e t E. L i f c h i t z, Electrodynamique des milieux continus. Moscou, Editions Mir, 1969.

L. L a n d a u e t E. L i f c h i t z, Théorie des champs. Moscou, Editions Mir, 1970.

P a n o f s k y e t P h i l l i p s, Classical electricity and magnetism. Addison Wesley.

L. M a n d e l s t a m m, Cours d'optique, de la théorie de la relativité et de la mécanique des quanta (Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике). Moscou, Naouka, 1972.

W. P a u l i, Theory of Relativity. Pergamon press, 1958.

R. F e y n m a n, R. L e i g h t o n a. o., The Feynman Lectures on Physics. Addison Wesley publ. co., cop., 1963-1965.

V. F o c k, The theory of space, time and gravitation (traduit du russe). Pergamon press, 1959.

A. S o m m e r f e l d, Elektrodynamik, Vorlesungen über theoretiche Physik Bd. 3. Leipzig. Akad. Velr.-Ges. Geest und Porting, 1949.

M. T o n n e l a t, Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité. Masson, 1959.

V. K o u r g a n o f f, Initiation à la théorie de la relativité. Paris, Presses universitaires de France, 1964.

D. B o h m, The Special Theory of Relativity. New York-Amsterdam, Benjamin, 1965.

C. L a n c z o s, Albert Einstein and the cosmic world ordre. New York [a.o.] Interscience publ., 1965.

E. T a y l o r, J. A. W h e e l e r, Spacetime Physics. San Francisco-London, Freeman, 1966.

H. B o n d i, Relativity and Common Sense. A new approach to Einstein. London Heinemann, 1965.

M. B o r n, Die Relativitätstheorie Einsteins und ihre physikalischen Grundlagen Gemeinverständlich dargestellt. Berlin, Springer, 1920.

A. E i n s t e i n e t L. I n f e l d, L'évolution des idées en physique. Petite bibliothèque Payot n° 17, 1963.

A. J. M c. C o n n e l l, Application of tensor analysis. New York, Dover publ., 1957.

C. M ö l l e r, Relativistic Thermodynamics, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 36, n° 1, 1967.

P. R a c h e v s k i, Géométrie riemannienne et analyse tensorielle (Риманова геометрия и тензорный анализ). Moscou, Naouka, 1967.

B. R o z e n f e l d, Espaces multidimensionnels (Многомерные пространства). Moscou, Naouka, 1966.

P. B e r g m a n, An Introduction to the Theory of Relativity. New York, 1942.

J. J a c k s o n, Classical Electrodynamics. New York, 1962.

K. D u r e l l, Readable Relativity. London, 1962.

J. S c h w a r t z, Relativity in Illustration. New Vork, 1965.

R. N e v a n l i n n a, Zeit und Relativität. Basel, 1964.

GLOSSAIRE

Aberration. C'est la déviation apparente périodique des astres immobiles de leurs positions moyennes sur la *sphère céleste*. Par suite de l'aberration, la plupart de ces astres décrivent durant l'année des ellipses.

Accélération inertiale. La particule matérielle se mouvant dans un système non inertial est accélérée d'une façon qui ne s'explique point par les forces appliquées à cette particule. De telles accélérations sont dites accélérations inertiales. L'exemple en est fourni par des accélérations observées au cas où le référentiel utilisé est en rotation par rapport au référentiel d'inertie. Si au moment initial la particule est au repos relativement au référentiel en rotation, elle est soumise à une accélération dite centrifuge dont la valeur est proportionnelle à la distance jusqu'à l'axe de rotation (la vitesse angulaire du système étant fixe). Si la particule se meut relativement au référentiel tournant, surgit alors une accélération inertiale complémentaire qui varie selon la vitesse de la particule (relativement au référentiel en rotation). Une telle accélération est orthogonale tant à l'axe de rotation du référentiel qu'à la direction de la vitesse instantanée de la particule. Elle porte le nom d'accélération de Coriolis.

Action à distance. D'après Newton qui considérait avant tout les forces de l'attraction universelle, tous les corps exercent une influence mutuelle, ce qui provoque l'accélération dont la valeur dépend de la masse du corps. Le produit de l'accélération par la masse du corps es la *force* qui agit sur ce corps. S cette force est transmise par l'espa ce vide, on parle alors de l'action à distance; dans la théorie électromagnétique de Maxwell, on a évoqué pour la première fois l'action de proche en proche, c.-à-d. l'action exercée par les corps à travers le *champ* électromagnétique. L'action à distance est une influence (action) instantanée d'un corps sur un autre indépendamment de la distance qui les sépare. Quant à l'interaction transmise par le champ, elle se propage à une vitesse finie. Pour les champs électromagnétique et gravitationnel, cette vitesse est de l'ordre de 300 000 km/s. La vitesse universelle de la propagation des champs est habituellement désignée par *c* (voir *Champ*).

Champ. La physique newtonienne supposait que les corps ayant la masse au repos étaient en interaction directe à travers l'espace vide infini. L'attraction ou la répulsion mutuelle de deux corps donnés ne dépendait que de la distance entre eux. Il s'avéra pourtant que les interactions électromagnétiques variaient non seulement en fonction de la distance entre les corps mais de leur vitesse relative. Les modifications des positions et des états du mouvement des corps se propagent avec la vitesse finie (*c*) égale à la vitesse de la lumière dans le vide. C'est pourquoi, le concept newtonien de l'action instantanée à distance céda la place au concept de l'action de proche en proche et des champs qui jouent le rôle d'intermédiaires. Ces champs surgissent

là, où est placée une source et se propagent dans toutes les directions avec la vitesse finie. Sur ce tableau « de champs », la force, appliquée à une particule chargée, est engendrée par le champ électrique dans le voisinage immédiat de la particule et qui n'est liée qu'indirectement à ses sources — charges éloignées.

En physique relativiste, le concept de champ est appliqué non seulement aux phénomènes électromagnétiques mais aussi à la gravitation. A présent, il règne sans partage dans l'analyse des interactions entre les particules, quelle que soit la nature de ces interactions.

Cône isotrope. Pour le point-événement dans le continuum espace-temps il existe sûrement un lieu géométrique de toutes les directions de la propagation du signal lumineux issu de ce point-événement ou convergé vers ce point. L'ensemble de telles directions forme le cône isotrope rattaché à l'événement considéré. Les directions de la lumière allant vers l'événement représentent la région du Passé du cône; celles qui correspondent au signal s'éloignant du point-événement, la région du Futur du cône. Si la région du Passé est prolongée à l'infini, ses génératrices isotropes s'identifient aux points de la sphère nommée *sphère céleste*.

Continuum. Ce terme se rapporte à l'ensemble de points qui forment une ligne (continuum unidimensionnel), un plan (continuum bidimensionnel), un espace tridimensionnel, un espace-temps quadridimensionnel ou d'autres variétés. Il ne faut pas confondre le continuum avec l'ensemble discret de points où chaque point est séparé de tous les autres points de l'ensemble. Dans un continuum, tout point est entouré des autres points qui appartiennent à l'ensemble de sorte que dans tout voisinage aussi petit que l'on veut d'un point donné il y a toujours des points inclus dans cet ensemble.

Covariance; invariance. Un système d'équations reliant les quantités mathématiques ou physiques est dit covariant si de la validité de ces équations dans un système de coordonnées découle celle des équations qui leur sont formellement identiques dans tout autre repère. Si un système d'équations (ou une équation) est covariant par la transformation de Lorentz de la Relativité restreinte, on parle alors de l'invariance lorentzienne. Si les équations conservent leur forme dans toute transformation des coordonnées, y compris lors du passage aux coordonnées curvilignes utilisées en Relativité générale, il est admis de parler de la covariance générale.

Une relation mathématique quelconque, ou une équation, qui a la même forme dans les différents repères indépendamment d'autres équations est dite invariante. Ainsi, la covariance est une propriété du système de plusieurs relations qui, étant valides dans un référentiel, conservent leur forme dans tous les autres référentiels. L'invariance est la même propriété qui ne se rapporte pourtant qu'à une seule équation. La différence entre ces deux notions n'est pas souvent relevée, et la covariance et l'invariance sont utilisées en tant que synonymes.

La collection de grandeurs (et non de relations) est souvent dite covariante si leurs valeurs numériques dans un repère s'expriment au moyen de celles dans tout autre référentiel à l'aide de la loi de transformation. L'exemple type de ces collections covariantes de grandeurs est donné par les composantes d'un vecteur ou d'un tenseur. Une seule quantité, dont la valeur numérique est la même dans tous les repères, est appelée invariant ou scalaire.

Energie. En Mécanique newtonienne, l'énergie est une capacité d'un corps de produire du travail. L'énergie mécanique possède deux formes: cinétique et potentielle. L'énergie cinétique est définie par la vitesse du corps; elle est égale au travail à produire sur le corps

afin que celui-ci ait une vitesse donnée. L'énergie potentielle est définie par la position d'un corps dans un champ de forces; elle se traduit par le travail dépensé pour amener le corps en position voulue. L'énergie totale d'un corps est égale à la somme des énergies cinétique et potentielle.

Energie au repos; *masse au repos*. L'énergie au repos est une énergie de l'être physique, d'une particule par exemple, dans un référentiel, relativement auquel il est au repos. La masse au repos d'une particule, ou de tout autre corps, est une masse déterminée dans un référentiel où elle est au repos. En Relativité restreinte, l'énergie au repos est égale au produit de la masse au repos par le carré de la vitesse de la lumière: $E = mc^2$.

Ether. Comme le rayonnement électromagnétique (la lumière en particulier) avait été considéré en tant qu'analogue rapproché du son, il était assez logique d'admettre l'existence d'un milieu transmetteur d'un champ électromagnétique et de son énergie, exactement comme l'atmosphère, l'eau et la terre sont les porteurs du son et de son énergie. Mais les ondes électromagnétiques, à la différence du son qui n'est pas susceptible de se propager dans l'espace dépourvu de matière, voyagent avec des pertes d'énergie minimales et à la plus grande des vitesses connues à travers l'espace pratiquement vide (ce qui est le cas de l'espace intersidéral). Ce milieu hypothétique, appelé éther, qui sert à assurer la propagation d'un rayonnement électromagnétique, doit remplir tout domaine de l'espace indépendamment de la présence de la matière ordinaire. On fut contraint de donner à l'éther des caractéristiques mécaniques peu habituelles afin d'interpréter convenablement les propriétés bien connues des ondes magnétiques, à savoir, l'absence d'ondes électromagnétiques longitudinales. La vitesse de la propagation de la lumière découle des lois électrodynamiques; sa valeur, pourtant, variait en fonction de l'état du mouvement du système où celle-ci était mesurée relativement à l'éther. Comme il a été mis en évidence, on peut interpréter les tentatives visant à observer le caractère anisotrope de la propagation de la lumière par rapport à la Terre comme des expériences sur le mouvement de l'éther par rapport à la Terre (ce mouvement fut appelé vent d'éther).

La Relativité restreinte mit fin à l'hypothèse d'éther et établit que l'échec des tentatives visant à découvrir l'effet du vent d'éther concordait bien avec le principe de relativité. Ce principe barre définitivement la voie à toute possibilité de déceler l'éther expérimentalement.

Evénement. L'événement est un terme auxiliaire qui caractérise un phénomène assez nettement localisé dans l'espace et le temps de telle sorte qu'on puisse le rapporter à un point (dit parfois point d'univers) du continuum d'espace-temps quadridimensionnel. De bons exemples en sont fournis par une explosion ou un éclat de lumière qui se produisent à un certain moment dans un lieu donné. En Relativité restreinte, il est préférable de dire au lieu de l'« événement se produit » ou « s'est produit », « l'événement a lieu » ou « a eu lieu ».

Force. C'est un terme physique appliqué à toute action extérieure qui modifie l'état du mouvement d'un corps ou d'une particule qui possèdent la masse au repos. En Mécanique newtonienne, les forces résultent uniquement d'une interaction des corps. En l'absence de ces forces, le mouvement d'une particule relativement à un référentiel d'inertie n'est pas accéléré et elle se meut de façon rectiligne à une vitesse constante. La présence des forces s'exprime par l'apparition de l'accélération, donc par le changement de la vitesse du corps. L'accélération est toujours inversement proportionnelle à la masse du corps. La valeur de la force appliquée au corps se définit comme le produit de la

masse du corps par l'accélération acquise (principe fondamental de la dynamique).

Impulsion. L'impulsion du corps, dont la masse au repos est finie, est le produit de la masse du corps par sa vitesse. En Relativité, il s'agit de la masse relativiste qui dépend déjà de la vitesse et coïncide avec la masse classique si le corps est au repos. La notion d'impulsion est importante vu qu'elle suit le principe de la conservation. Lorsque des forces s'exercent entre deux corps, l'accroissement de l'impulsion de l'un de ces corps dû à l'accélération est compensé par la diminution de l'impulsion de l'autre de sorte que l'impulsion résultante des deux corps ne varie pas. La même loi est valable pour un système composé d'un grand nombre de particules qui sont en interaction mais isolées des forces extérieures (système isolé).

Intervalle; *invariant spatio-temporel.* En Géométrie tridimensionnelle usuelle, deux points sont séparés par une distance dont la valeur ne dépend pas du choix du système de coordonnées qui effectue le repérage des points. Dans le *système de coordonnées cartésiennes*, le carré de la distance de deux points est égal à la somme des carrés de trois différences correspondantes des coordonnées. Dans d'autres repères, la même valeur est définie autrement et, en règle générale, par des expressions plus compliquées.

Dans la géométrie spatio-temporelle de Minkowski, le rôle de la distance est tenu par l'intervalle spatio-temporel. Le carré de l'intervalle du genre temps entre deux événements est égal au carré de la différence des coordonnées temporelles, multiplié par c, moins le carré de la distance spatiale entre ces mêmes événements si l'on a pris pour système de référence le *système de coordonnées lorentziennes.* Bien que la différence des coordonnées temporelles de deux événements soit fonction du repère, aussi bien que leur distance spatiale, la valeur de l'intervalle invariant est la même dans tous les systèmes lorentziens. Sous cette optique l'intervalle spatio-temporel de la géométrie de Minkowski est semblable à la distance des points dans la géométrie classique. Si la distance de deux points dans l'espace habituel s'annule uniquement au cas où ces points se confondent (au fait c'est un seul point), l'intervalle spatio-temporel entre deux événements différents se réduit à zéro lorsque les événements sont isotropes. Cela signifie que le signal lumineux, émis du point où a eu lieu le premier événement, atteint le point du second événement juste au moment de la réalisation de ce dernier.

Invariance (voir *Covariance*).

Lois de transformation. Ce sont des règles qui permettent de déterminer les composantes des vecteurs, des tenseurs ou d'autres grandeurs de ce type dans tout système de coordonnées si l'on connaît leurs valeurs numériques dans un système de coordonnées déterminé. Par exemple, si dans un système de coordonnées on connaît les composantes du vecteur, il se définit complètement en tant que grandeur possédant une longueur et une orientation; on obtient ses composantes relativement à n'importe quel autre système de coordonnées en projetant ce vecteur sur les axes correspondantes. La définition de ces « nouvelles » coordonnées en fonction des « anciennes » représente la loi de transformation (voir *Covariance*).

Orthogonalité. Le terme « orthogonal » (dirigé sous l'angle droit) est préférable au terme « perpendiculaire » surtout dans les géométries sensiblement différentes de celle de l'espace usuel. Il en est ainsi pour la géométrie de Minkowski.

Principes de la conservation; *principes de la continuité.* Une grandeur physique est dite conservable si sa valeur ne varie pas avec le temps; autrement dit si elle représente une constante (intégrale) du mouvement. Aussi une grandeur se trouve-t-elle conservée, si elle n'est modifiée que

sous l'action des forces extérieures provenant des corps en dehors du système envisagé. Parmi les grandeurs les plus importantes qui se conservent il faut noter l'énergie, l'impulsion, l'impulsion angulaire, la charge électrique. Le principe de la conservation est une loi de la nature qui exige qu'une grandeur déterminée soit conservée. Si ce principe a la forme telle que le taux d'accroissement de la densité d'une grandeur donnée (de la densité d'énergie par exemple) est dû à la divergence de cette grandeur, il est appelé principe de la continuité (de cette même grandeur).

Référentiels d'inertie. L'exemple en est un système relativement auquel tous les corps physiques qui possèdent une masse au repos finie et ne sont pas soumis aux forces extérieures se déplacent d'un mouvement rectiligne et uniforme. Il en existe une quantité innombrable. Une fois un de ces systèmes inertiaux trouvé, tous les autres systèmes qui sont en mouvement uniforme et rectiligne par rapport au premier et qui ne tournent pas s'avèrent également inertiaux.

Scalaire, voir *Covariance*.

Sphère céleste. Les observations directes des objectifs extraterrestres impliquent la projection de ces derniers sur la surface d'une sphère de rayon arbitraire avec l'observateur au centre. Une telle sphère imaginaire est appelée sphère céleste. Ses points sont habituellement définis par deux angles correspondant à la latitude et à la longitude géographiques sur Terre. Sur la sphère céleste, ces angles sont nommés déclinaison et ascension droite et, d'après la Relativité restreinte, ils dépendent, pour les objectifs lointains (tels que les astres immobiles), de l'état du mouvement de l'observateur.

Système de coordonnées cartésiennes. Dans ce système, tous les axes (courbes) de coordonnées sont les droites. Elles sont toutes orthogonales et étalonnées à l'aide des échelles de longueur choisies, de centimètre par exemple. Pour deux points donnés, dont les coordonnées cartésiennes sont égales à x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2, le carré de la distance r^2 est défini par l'expression $r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$.

Système de coordonnées de Lorentz, système de référence de Lorentz. En Relativité restreinte, les référentiels d'inertie sont souvent appelés systèmes de référence de Lorentz. On sous-entend par là qu'à tout instant le système de coordonnées spatiales est de Descartes et que les unités de mesure du temps sont choisies de sorte que la vitesse de la lumière dans le vide soit constante dans toutes les directions, en tous les points et à tous les instants. En langage de la géométrie quadridimensionnelle de Minkowski, il est convenable d'appeler système de coordonnées lorentzien tout système de référence de Lorentz.

Système de référence. Ce terme est employé dans n'importe quel système d'étalons, définissant la position d'un objet physique, même si cette dernière change avec le temps. Le système de référence diffère du système de coordonnées tridimensionnel par ce que ce dernier est défini sans tenir compte du temps tandis que la construction du système de référence exige que ces coordonnées spatiales soient rattachées au temps. Pour le définir complètement, il faut donner la position de l'origine du système de coordonnées spatiales et les directions des axes pour tout moment de temps. Ainsi, les trajectoires des objets physiques, c.-à-d. leurs positions aux différents instants, peuvent être décrites si l'on donne les valeurs de toutes les coordonnées de ces objets pour tout moment de temps. En langage quadridimensionnel, le système de référence représente un système de coordonnées quadridimensionnel dont trois axes suivent la direction du genre espace et le quatrième du genre temps (voir *Référentiels d'inertie*).

Systèmes de coordonnées. Les systèmes de coordonnées (repères) sont intro-

duits pour marquer les positions des points ou des corps physiques dans l'espace. Au fond, donner un système de coordonnées c'est de formuler les règles d'après lesquelles la position d'un point quelconque de l'espace tridimensionnel est décrite par trois nombres et réciproquement. Les lois de l'identification des points peuvent se formuler de façon que les positions des points dans le voisinage d'un point donné se caractérisent par les différences des valeurs correspondantes de toutes les trois coordonnées. Ainsi, le système de coordonnées peut être représenté sous forme manifeste de la manière suivante. L'espace est couvert d'un réseau tridimensionnel formé de lignes. Les points d'intersection de ces lignes correspondent aux valeurs entières des coordonnées; les valeurs fractionnaires des coordonnées correspondent aux points situés à l'intérieur des cellules du réseau.

Le point de la surface bidimensionnelle est défini par deux coordonnées et le point de la courbe par une seule coordonnée. Enfin, selon Minkowski, tous les événements localisés dans le temps et dans l'espace représentent les points du continuum quadridimensionnel. Pour repérer un événement dans l'espace-temps, il est indispensable de connaître quatre coordonnées (voir *Système de coordonnées cartésiennes*, *Système de référence*).

Si le système de coordonnées est rattaché à la Terre, il est admis de parler du système géocentrique de coordonnées; le système de coordonnées lié au Soleil est dit héliocentrique.

Système isolé. C'est un système où toutes les forces ne sont conditionnées que par l'interaction des corps y inclus. Autrement dit, c'est un système qui n'est pas soumis à l'action des forces extérieures.

Temps propre. Le temps propre est un intervalle spatio-temporel invariant du genre temps séparant deux points (du quadriespace) pris sur la trajectoire d'un corps matériel, d'une particule par exemple. Le temps propre est calculé depuis un point arbitrairement choisi de la trajectoire du corps et s'accroît en direction du « Futur ». L'horloge qui se meut avec la particule (fixée à celle-ci) indique en général le temps propre si elle n'est pas soumise à l'accélération ou à toute autre influence extérieure.

Tenseur des tensions. La tension surgit en tant que réaction d'un milieu continu ou d'un corps à la déformation. Des tensions qui sont dues aux compressions sont d'habitude appelées pressions; celles qui sont liées à la modification de la forme sont nommées tensions de cisaillement. Mathématiquement, la tension totale est décrite par un tenseur dont les composantes sont représentées par les forces qui sont appliquées aux surfaces tracées à l'intérieur du corps et possédant les différentes orientations spatiales.

Tenseurs. Ce sont des êtres mathématiques obtenus par suite de la généralisation du concept vectoriel. Dans une variété décrite à l'aide des coordonnées, les tenseurs sont complètement définis par leurs composantes (appelées composantes du tenseur). Comme il existe plusieurs espèces de tenseurs (dont les vecteurs ne font qu'une minorité), il est en général impossible de se prononcer définitivement sur le nombre de composantes d'un tenseur. Néanmoins, ce nombre de composantes est toujours bien défini pour chaque type de tenseurs définis dans la variété à un nombre fixé de dimensions. En partant des valeurs numériques de toutes les composantes tensorielles dans un système de coordonnées, on parvient à connaître celles du même tenseur dans n'importe quel autre; ce calcul est effectué selon les règles dites loi de transformation des tenseurs de cette espèce.

Certains tenseurs sont liés à l'orientation d'une courbe (vecteurs tangents), d'une surface bidimensionnelle (bivecteurs) et des structures des plus hautes dimensions. En théorie des élasticités, le ten-

seur des déformations décrit les déformations locales (dilatations et changements d'angles) d'une matière ; le tenseur des tensions embrasse tout l'ensemble d'information concernant les forces intérieures qui, surgissant par suite de la déformation, tendent à rétablir la forme d'équilibre primitif.

Trajectoire. Une courbe décrite dans le temps par un mobile qui possède la masse au repos est appelée trajectoire d'une particule (ou d'un corps). Pour s'imaginer complètement le mouvement de la particule il faut savoir non seulement les points de la trajectoire de cette particule mais également des moments de temps correspondant au passage de celle-ci par ces points. Dans le continuum d'espace-temps de Minkowski, la trajectoire d'une particule est une courbe dont chaque point est déterminé par quatre coordonnées spatio-temporelles de la particule.

Transformation de Lorentz. La transformation de Lorentz est la loi de transformation des coordonnées spatio-temporelles quadridimensionnelles d'un événement lors du passage d'un système de coordonnées lorentzien à un autre. Deux systèmes de Lorentz en question sont au repos relatif ou en mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre (sans rotation). Les origines de référence des coordonnées spatio-temporelles ne se confondent pas toujours et les axes de coordonnées spatiales peuvent ne pas être parallèles. Une transformation lorentzienne concrète est définie par dix paramètres : les composantes de la vitesse relative des systèmes (trois paramètres), les angles faits par les axes de coordonnées spatiales respectives (trois paramètres ; par exemple les angles d'Euler) et, enfin, les coordonnées spatiales et temporelles de l'origine de référence d'un système par rapport à un autre (quatre paramètres).

Variété. En langage mathématique, la représentation de l'espace est souvent réduite à l'ensemble de points qui s'identifie à un système de nombres réels (ses coordonnées) de façon qu'à chaque système de n nombres réels (dans le cas où l'espace est à n dimensions) corresponde un point et un seul. Les points sont considérés comme voisins si les différences des coordonnées correspondantes sont petites. Un tel espace possède d'une part les propriétés locales, c.-à-d. celles d'un voisinage immédiat de tout point, qui sont analogues à nos conceptions usuelles de l'espace en entier et d'autre part les propriétés de l'espace tout entier d'après lesquelles tout l'espace peut être couvert d'un seul réseau de coordonnées.

Si l'ensemble infini de points possède partout les propriétés locales de l'espace mais ne peut être couvert d'un réseau de coordonnées, il est appelé variété. Le plan représente un espace bidimensionnel et la surface d'une sphère une variété. En effet, si l'on établit les coordonnées, mettons, à partir du pôle Nord, ces dernières couvrent la plus grande partie de la sphère mais, à proximité du pôle Sud, on est contraint soit de donner à ce point (qui ne diffère en rien des autres) une quantité infinie de valeurs distinctes des coordonnées, soit d'éliminer ce point du système. Deux systèmes de coordonnées superposés sont suffisants à décrire complètement la surface de la sphère. Le tore, les surfaces de Möbius et de Klein peuvent servir d'exemples de variétés. L'espace étant un cas particulier de la variété (l'inverse n'est pas vrai), cette dernière est souvent employée afin de souligner le fait que l'ensemble de points considéré n'est pas obligatoirement un espace.

Vecteur. Le vecteur est le cas particulier du *tenseur* ; le nombre de ses composantes coïncide avec le nombre de dimensions de l'espace ou de la variété où il est défini. L'exemple le plus simple en est fourni par un segment de droite déterminé par son origine, la direction de la droite qui le porte, son sens et sa grandeur ou module.

INDEX

TABLE DES MATIÈRES